GUÍA DOCENTE

Grao de Matemáticas

Topoloxía dos Espazos Euclidianos

Prof. Xosé M. Masa Vázquez

Departamento de Xeometría e Topoloxía

Curso 2008-09

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Datos descritivos da materia

Materia ***básica*** de primeiro curso do Grao en Matemáticas, segundo cuadrimestre, de ***6 créditos***.

Os principais ***prerrequisitos*** estúdanse nas materias de *Linguaxe matemática, conxuntos e números* e *Introducción á Análise Matemática*, que se cursan no primeiro cuadrimestre do primeiro ano. En concreto, é esencial o coñecemento das propiedades do corpo dos números reais, particularmente a propiedade de ser arquimediano. É recomendábel ter algunhas nocións de enumerabilidade de conxuntos. Supóñense tamén coñecidas as propiedades básicas de converxencia de sucesións numéricas. Precísase o manexo da estrutura de espazo vectorial de $\mathbb{R}^p$, que se recordará no primeiro tema da materia *Espazos vectoriais e cálculo matricial*, que se estuda ao tempo que ésta. En fín, decote realizaranse construccións xeométricas sinxelas en $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, usando matemáticas escolares elementais.

Preámbulo

Dime e esquézoo,
ensíname e recórdoo,
involúcrame e apréndoo.

Benjamin Franklin

Esta *Guía* proponse un dobre obxectivo: dunha parte, describir os contidos da materia e os coñecementos e competencias que se queren acadar; doutra parte, explicar a metodoloxía de traballo que se pretende seguir. Para isto, despois dalgunhas consideracións xerais, faise un recorrido pausado polo programa no que, ao tempo que se reflexiona brevemente sobre cada tema, se explicitan certos recursos didácticos, xa sexan tarefas a realizar por cada estudante, xa sexan sesións de traballo especiais. Nunha segunda parte, máis breve, abórdanse directamente as cuestións metodolóxicas. Descríbense os diversos tipos de tarefas e sesións das que se fala, o tipo de dinámica de aprendizaxe que se concibe, os tempos estimados de adicación a cada tarefa, etc. Inclúese tamén nestas páxinas información sobre os métodos de avaliación da materia. Porque, certamente, é unha cuestión que suscita o maior interese, e porque métodos de avaliación e métodos de aprendizaxe teñen unha relación estreita.

Acéptase a idea de que a aprendizaxe é un camiño que ten que recorrer cada quen, o que require interese, iniciativa e autonomía, calidades que se desexa propiciar.

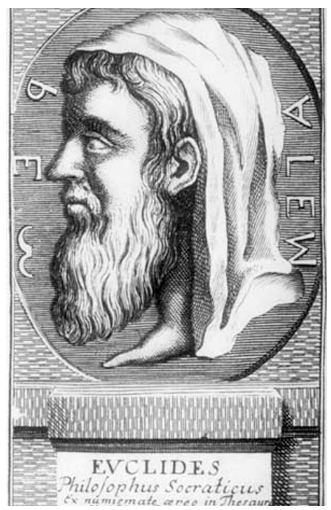
Compre sinalar que tanto no que fai a contidos como no que fai a método, estas páxinas deben ser entendidas como unha proposta, unha declaración de intencións que fai, neste caso, o profesor. Que se achegue despois á realidade dependerá da súa adicación e capacidade, e tamén do teu interese, lector ou lectora estudante. E, nalgunha medida, da adicación e capacidade colectiva. As estratexias de aprendizaxe son moitas e variadas, e para cada quen serán mellores unhas que outras, en función da súa personalidade ou doutros factores. E se intentará ser respectuoso con todas elas. Pero convén adiantar que o principal esforzo se orientará a favorecer unha dinámica de traballo participativa e regular ao longo do curso.

En liña coa actitude activa que se espera, non se exclúe o debate sobre o propio método, tanto no seu deseño orixinal, como na súa realización práctica.

En fin, a *Guía* contén tamén algunhas outras informacións de interese, como bibliografía ou recursos virtuais.

Sentido da materia no perfil

EUCLIDES (300 a.n.e) exerceu o seu maxisterio na escola de Alexandría, onde escribíu varios tratados. O máis coñecido, os *Elementos*, contén unha recompilación e ordenación sistemática de boa parte do coñecemento matemático do seu tempo. Inclúe, en particular, unha formalización axiomática da xeometría que hoxe leva o seu nome.



O espazo euclidiano é o obxecto matemático que mellor se corresponde (en dimensións baixas) coa intuición primitiva de espazo físico. É o marco no que Euclides elaborou a primeira formalización dunha xeometría, e del toma o nome. Tamén o cálculo diferencial e integral comezou a súa andadura nestes espazos, que seguen a ser un modelo fundamental ná matemática contemporánea. Resulta, pois, natural que sexa unha referencia central na formación de calquera matemático, e que teña un peso importante no inicio dos estudos.

O espazo euclidiano é o resultado de dotar ao conxunto $\mathbb{R}^p$, a xeneralización do plano $\mathbb{R}^2$ e do espazo tridimensional usual $\mathbb{R}^3$, de dúas estruturas: unha de espazo vectorial, que permite sumar puntos (vectores) e multiplicalos por números (escalares), definir rectas e outros obxectos; e outra métrica, que permite definir ángulos e distancias. Con estes elementos pódese desenvolver a xeometría clásica, obxecto doutra materia do segundo curso, e o cálculo diferencial e integral, ao que se adican varias materias dos primeiros anos.

Foi xustamente da man do cálculo diferencial, da análise matemática, da necesidade de clarexar os seus conceptos e establecer solidamente os seus fundamentos, por un lado, e do interese en aplicar os seus métodos, tan eficaces, en espazos máis abstractos que os euclidianos (p.e., espazos nos que os puntos son funcións, espazos de dimensión infinita,...), de onde xurde a topoloxía denominada *xeral* ou *conxuntista*, que é da que trata a materia.

O que fai esta topoloxía é abstraer a estrutura e conceptos xeométricos necesarios, prescindindo do condicionante métrico inicial, para fundamentalos e desenvolvelos, dándolles un tratamento sistemático. Resulta ser, de feito, unha das ramas da matemática á que mellor convén o tratamento axiomático, método árido que se obviará, pois non é apropiado para un curso introdutorio.

Con independencia de que existan resultados matemáticos anteriores que hoxe recoñecemos como de natureza topolóxica, pódense situar os comezos da Topoloxía no traballo de Karl Weierstrass, alá polo ano 1860, no que analiza o concepto de límite dunha función. Uns anos despois, o desenvolvemento da teoría de conxuntos de George Cantor permitiría sentar as bases da Topoloxía Xeral como rama independente da Análise. Inicialmente denominábase *analisis situ*, popularizándose o nome de topoloxía a partir de 1930, cando S. Lefschetz publica un libro con este nome (aínda que xa se usara este nome case cen anos antes). Nos seguintes 50 anos a topoloxía desenvolveuse a un ritmo acelerado, influíndo ampliamente en toda a matemática do s. XX.

O estudo da topoloxía da recta real iniciouse na materia de *Introdución á Análise Matemática* e, no que fai á continuidade, desenvólvese na materia *Continuidade e derivabilidade de funcións dunha variábel real.* Agora, nesta materia, vaise abordar o estudo da topoloxía non soamente da recta real, mais dos espazos euclidianos de calquera dimensión. Ademais, farase un tratamento máis sistemático das cuestións consideradas.

Trátase de estudar conceptos, métodos e propiedades métricos e, fundamentalmente, topolóxicos en $\mathbb{R}^p$, partindo da súa estrutura euclidiana. A maioría dos exemplos considerados corresponderán á recta e ao plano. Os principais conceptos que se van estudar son os de completitude, continuidade, conexidade e compacidade, facendo especial fincapé nas técnicas de converxencia de sucesións, que son as técnicas xa empregadas nos estudos previos.

Compre salientar, doutra parte, que o tipo de discurso da topoloxía é moi apropiado para a aprendizaxe da escritura formal e rigorosa das matemáticas, o que incrementa o seu valor formativo.

Obxectivos da materia

> *Na base do concepto de distancia encóntrase, por exemplo, o concepto de converxencia de sucesións de puntos e os seus límites, e un pode, tomando estas ideas como base, prescindir da noción de distancia.*
>
> Felix Hausdorff

Entre outros conceptos topolóxicos, no curso estudaremos as nocións de continuidade dunha función, de conexidade e de compacidade. Daremos a estes conceptos un tratamento amplo, porque son básicos en toda a matemática contemporánea.

Para achegarnos a estes conceptos e establecer as súas propiedades teremos que utilizar ferramentas diversas. A que utilizaremos de forma máis reiterada será a *converxencia de sucesións.* Isa será a primeira competencia curricular que sinalamos, que podería enunciarse como capacidade de aplicar a converxencia de sucesións á caracterización de propiedades topolóxicas. Isto require unha boa comprensión do concepto de límite, primeiro; require ser capaz de identificar sucesións converxentes; require ser capaz de construír sucesións converxentes relevantes para a cuestión en estudo; ser capaz, en fin, de relacionar a converxencia coa propiedade considerada, ideando a oportuna demostración.

A segunda competencia curricular ten que ver coa *continuidade* das funcións máis comúns no ámbito dos espazos euclidianos. Trátase de identificar funcións continuas ou discontinuidades de funcións, de describir funcións xeometricamente, dispor de exemplos de funcións que ilustren propiedades diversas, ou ser quen de encontrar a expresión analítica de transformacións xeométricas sinxelas.

Os resultados máis profundos do programa relaciónanse cos conceptos de *conexidade* e *compacidade.* É tamén o marco no que se obteñen as aplicacións máis fortes da teoría desenvolta. Coñecer esta teoría abstracta e comprender o papel determinante que estas nocións desempeñan nas aplicacións consideradas é a terceira competencia curricular. Na súa expresión máis sinxela, o resultado típico dirá que *toda función real continua con dominio un intervalo pechado alcanza o máximo, o mínimo e calquera valor intermedio.* É unha mostra dun dos aspectos máis característicos da matemática: como a solución de problemas, as veces de formulación simple, require a miúdo de teorías moi abstractas.

Ademais destas competencias estrictamente curriculares, no curso vanse traballar outras dúas.

A primeira céntrase na *linguaxe* das matemáticas, nunha dobre vertente: comprender os enunciados cos que se traballa, diferenciar hipóteses, tese e demostración, comprender o valor dos exemplos e dos contraexemplos,... Doutra parte trátase de incidir na expresión matemática formal, acadar unha escritura medianamente correcta, evitando mesturar a linguaxe informal coa sintaxe lóxica formal.

A segunda competencia non curricular terá que ver coas *estratexias de aprendizaxe*, tratando de inculcar a práctica de pensar por un mesmo, do esforzo na comprensión, analizando exemplos concretos, do empeño na resolución de exercicios, evitando a dinámica de buscar onde ler a solución, adquirir o hábito do esforzo por encontrar o camiño, de xeito que cada estudante poida chegar a elaborar demostracións propias de cuestións sinxelas, non porque as recorde, senón pola pericia que teña acadado.

Contidos da materia

A título orientativo indícase o número de créditos que se vai adicar a cada tema. Os 7 primeiros temas agrúpanse en bloques: o primeiro bloque introduce a estrutura do espazo (temas 1 e 2), o segundo bloque concerne á converxencia (temas 3 e 4), e o terceiro adícase á continuidade de funcións (temas 5, 6 e 7). O estudo dun tema precisa do coñecemento de todos os anteriores. Non obstante, non sempre se fará un desenvolvemento linear do programa: en ocasións se tratará un caso particular antes de coñocer a teoría que facilite o seu estudo máis xeral e sistemático.

Tema 1 Os espazos euclidianos (0,5 créditos)

1.1 Produto escalar e norma euclidiana

1.2 Desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Minkowski

1.3 Distancia euclidiana. Propiedades; a desigualdade triangular

1.4 Bólas abertas

1.5 Distancia entre conxuntos. Conxuntos limitados. Diámetro

Tema 2 A topoloxía do espazo euclidiano (0,75 créditos)

2.1 Definición de conxunto aberto

2.2 Propiedades características dos conxuntos abertos

2.3 Conxuntos pechados.

2.4 Espazos e subespazos. Abertos relativos

Tema 3 Converxencia (0,5 créditos)

3.1 Sucesións. Sucesións converxentes

3.2 Converxencia e topoloxía: puntos de acumulación.

Tema 4 Completitude (0,75 créditos)

4.1 Sucesións de Cauchy

4.2 A completitude de $\mathbb{R}$: principio do supremo e postulado dos intervalos encaixados

4.3 Teorema de Bolzano-Weierstrass

4.4 Completitude do espazo euclidiano

Tema 5 Continuidade (1 crédito)

5.1 Definición de continuidade

5.2 Composición de funcións continuas. Restrición

5.3 Continuidade secuencial

Tema 6 Continuidade Global (0,5 créditos)

6.1 Caracterización global da continuidade

6.2 Función combinada

Tema 7 Propiedades topolóxicas (0,25 créditos)

7.1 Homeomorfismos.

7.2 Propiedades topolóxicas

Tema 8 Conexidade (0,75 créditos)

8.1 Espazos conexos

8.2 O Teorema do valor intermedio

Tema 9 Compacidade (1 crédito)

9.1 Compacidade. Compacidade secuencial

9.2 Caracterización dos conxuntos compactos no espazo euclidiano

9.3 O Teorema do máximo e do mínimo

9.4 Continuidade uniforme

9.5 Conxuntos compactos e conexos

Tema 1: O Espazo Euclidiano

Hermann Minkowski (1864-1909) ensinou en varias universidades, Bonn, Koninsberg, Zurich, onde tivo como estudante en varios cursos a Einstein, e, especialmente, en Gottingen, onde coincidíu con Hilbert. Nesta última concebíu o espazo-tempo de catro dimensións; ate ese momento ao tempo dábaselle un tratamento independente do espazo. E comprendeu que o traballo de Lorentz e de Einstein precisaba dun espazo con xeometría non-euclidiana.

Pártese de $\mathbb{R}^p$, produto cartesiano de p copias de $\mathbb{R}$, provisto da súa estrutura de espazo vectorial. A estrutura euclidiana (que é unha estrutura métrica) defínese mediante o produto escalar de dous vectores, o que permite definir ángulo (e, pois, relacións de ortogonalidade) e, o que vai ser fundamental neste curso, distancia entre puntos.

A distancia permite definir bólas, a forma xeométrica de expresar a propiedade dun punto de distar menos que un número positivo, o raio, dun punto dado, o centro da bóla. E as bólas permiten construír toda a estrutura topolóxica destes espazos.

No tema introdúcense estas nocións sinxelas, pero da maior importancia, e se proban as súas propiedades principais.

Para as necesidades do curso abonda con definir directamente distancia, que no plano ou no espazo é a distancia estudada na xeometría escolar. Conceptualmente é máis interesante derivar esta noción da de produto escalar, establecer a desigualdade de Cauchy-Schwarz, unha propiedade do produto escalar, e dela deducir a desigualdade triangular, que será moi útil en cálculos posteriores.

O tema complétase coa consideración de varias nocións e propiedades métricas de subconxuntos.

Lectura recomendada:

J. Rey Pastor, J. Babini.- *Historia de la Matemática. I*
Cap. IV, $n^{\underline{o}}\,2$ *Euclides y sus Elementos* (páx. 71 e ss.)
Editorial Gedisa, 1985.

Tema 2: A topoloxía de $\mathbb{R}^p$

2.1 Definición de conxunto aberto

2.2 Propiedades características dos conxuntos abertos

2.3 Conxuntos pechados

2.4 Espazos e subespazos. Abertos relativos

GEOGE CANTOR (1845-1918) naceu en San Petesburgo, estudou en Berlín con Weierstrass e ensinou en Halle. É coñecido polo seu traballo sobre teoría de conxuntos, que desenvolveu durante os anos 1874-1895. Débense a el nocións como a de punto de acumulación, conxunto aberto ou conxunto pechado.

O concepto de conxunto aberto, ao que está adicado este tema, é a base da formalización moderna da topoloxía conxuntista. Foi unha das moitas propostas, esencialmente equivalentes, que se formularon nos primeiros anos do s.XX, que procuraban establecer os alicerces da topoloxía sen necesidade de partir dunha métrica (unha distancia), da que non sempre se dispón, e que non é un obxecto topolóxico. As primeiras formulacións usaban o concepto de converxencia de sucesións. Outro camiño parte do concepto de adherencia. Un proceso lento acabou decantándose pola opción de conxunto aberto, que aporta unha ferramenta simple e flexíbel para a investigación de todas as propiedades topolóxicas. Segundo esta aproximación, para definir a topoloxía pártese dunha colección de subconxuntos que verifiquen as catro propiedades características dos conxuntos abertos, propiedades estudadas neste tema. Esas propiedades convírtense nos axiomas que definen os espazos topolóxicos abstractos.

O estudo da topoloxía partindo de conxuntos abertos é máis abstracta e menos intuitiva que, por exemplo, se se parte do concepto de límite ou converxencia, que é a aproximación que imos utilizar preferentemente neste curso. Pero a converxencia de sucesións non é apropiada para traballar en espazos máis abstractos, e o uso de conxuntos abertos resulta máis eficaz ao tratar cuestións xeométricas complexas.

Unha vez establecido o concepto de conxunto aberto e demostradas as súas propiedades características, o tema conclúe introducindo o concepto dual de conxunto pechado, como complementar do aberto, que será especialmente útil na caracterización dos conxuntos compactos en $\mathbb{R}^p$.

Ate agora referímonos ao espazo $\mathbb{R}^p$ todo enteiro. Isto non sempre será así. Por exemplo, as funcións, que serán uns dos obxectos centrais do noso estudo, non todas están definidas en $\mathbb{R}^p$; o seu dominio de definición será, en xeral, tan só unha parte. Isto obriga a desenvolver o estudo topolóxico referido a ámbitos menores, subconxuntos de $\mathbb{R}^p$ que nese momento se convirten no universo completo que consideramos, pasan a ser o novo *espazo*. En ocasións teremos mesmo que traballar ao tempo con máis de un, tendo que falar de espazo e de subespazos.

O traballar en espazos distintos de $\mathbb{R}^p$ conleva algunha dificultade engadida. Así, conceptos topolóxicos que en $\mathbb{R}^p$ son moi intuitivos, como o de interior ou fronteira, conceptos desenvoltos neste tema, xa non o son noutros espazos (ou requiren doutra intuición, máis elaborada). No curso, a consideración destes espazos só resultará inevitábel ao tratarmos con funcións, polo que agora non demoraremos moito nestas cuestións. Mesmo os conceptos de interior, adherencia ou fronteira, imprescindíbeis nun curso máis abstracto, terán, neste curso, un uso reducido, e serán abordados mediante unha **Guía de estudo**.

O remate do tema proponse un **test de avaliación** *on-line*, dispoñíbel no curso virtual.

Tema 3: Converxencia

3.1 Sucesións

3.2 Converxencia e topoloxía: puntos de acumulación.

AGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789-1857) foi o fundador da análise matemática moderna e fixo tamén profundas contribucións noutras áreas da matemática. Foi enxeñeiro con Napoleón, seguíu a Carlos X no seu autoimposto exilio e foi excluído do seu posto no Collège de France por non prestar xuramento de lealdade. A pesar das súas actividades políticas e relixiosas, encontrou tempo para escribir 789 traballos de matemáticas.

Se o concepto de conxunto aberto é a base da formalización moderna da topoloxía conxuntista, os conceptos de límite e converxencia foron o punto de partida. De feito, para moitos matemáticos de principios do século XX a idea de límite dunha sucesión era a noción topolóxica fundamental. Para nós vai seguir xogando un papel central, especialmente en cálculos concretos. En cursos posteriores verase que, para certos espazos abstractos, a converxencia de sucesións non abonda.

Noutra materia deste ano, *Introducción á Analise Matemática*, cursada no primeiro cuadrimestre, xa se estudou a converxencia de sucesións en $\mathbb{R}$. E alí tratáronse de vagar criterios para dilucidar sobre a converxencia destas sucesións numéricas. Nós traballaremos con sucesións en $\mathbb{R}^p$, pero de contado veremos que a cuestión da súa converxencia redúcese ao problema coñecido da converxencia de sucesións numéricas. Por iso nós non insistiremos neste aspecto da cuestión. E porque os cálculos concretos que teremos que realizar serán sinxelos e coñecidos.

Ademais, boa parte do uso que imos facer da converxencia vai ser teórico: todos os conceptos e propiedades topolóxicos que imos estudar pódense caracterizar mediante converxencia de sucesións. O engarce será o concepto de punto de acumulación, e o feito de que todo punto de acumulación é límite dunha sucesión non estacionaria. Será necesario saber construír sucesións con certas propiedades e que converxen a un punto dado, ou saber que existen. O procedemento empregado, tomar un termo en cada bóla de raio $1/n$ con centro o punto, se se pensa nas bólas e non nos puntos que se van escollendo, condensa a idea mesma de converxencia nos espazos topolóxicos abstractos.

Finalmente utilízanse estos recursos para caracterizar mediante converxencia os conxuntos pechados: un conxunto é pechado se, e só se, toda sucesión converxente de puntos do conxunto converxe a un punto do conxunto.

Neste tema utilizarase decote un prerrequisito fundamental, o carácter arquimediano de $\mathbb{R}$, que equivale a dicir que a sucesión $\{1/n\}$ converxe a cero.

O concepto de punto de acumulación xogará un papel importante ao longo do curso, polo que haberá unha **Guía de estudo** de reforzo sobre esta cuestión, que estará dispoñíbel no curso virtual.

Ao remate do tema realizarase un **obradoiro** sobre converxencia e puntos de acumulación.

Tema 4: Completitude

4.1 Sucesións de Cauchy

4.2 A completitude de $\mathbb{R}$: principio do supremo e postulado dos intervalos encaixados

4.3 Teorema de Bolzano-Weierstrass. Completitude de $\mathbb{R}^p$

KARL WEIERSTRASS (1815-1897) foi durante moitos anos profesor en Berlín e exerceu unha profunda influencia no desenvolvemento da análise. Cunha notable insistencia no rigor das demostracións, realizou, pero non publicou, unha introducción ao sistema de números reais. Fixo importantes aportacións á analise real e complexo, ás ecuacións diferenciais e ao cálculo de variacións.

A cuestión da completitude de $\mathbb{R}$ foi suscitada xa polos matemáticos helenos. Ten que ver coa relación entre números e puntos da recta. É ben doado facer corresponder a cada número racional un punto da recta: escollido unha orixe, punto 0, e unha unidade, punto 1, para representar cada número da forma $n+\frac{p}{q}$, con $p<q$, divídese a unidade en q partes iguais, despois transpórtanse sobre a recta n unidades e p $q-$ésimas partes da unidade. Dise que o segmento de recta comprendido entre a orixe e este punto así contruído, por un lado, e o segmento unitario, por outro, son comensurabeis. Os puntos así construídos, correspondentes aos números racionais, están densamente distribuídos, ou sexa, entre dous calquera hai infinitos deles. Isto podería inducir a pensar que constitúen todos os puntos da recta. Pero non é así. Os pitagóricos xa coñecían a existencia de pares de segmentos non comensurabeis, por exemplo, o lado dun cadrado e a súa diagonal. Un longo proceso comezou á percura dos números que faltaban. Introducíronse primeiro as raices dos números racionais, e aínda os números alxébricos, raices de ecuacións polinomiais con coeficientes enteiros. Hai pouco máis de cen anos descubríuse que os números alxébricos non abondan. O número π e o número e, por exemplo, non son alxébricos: son casos notables dos denominados *números trascendentes*, porque *trascenden* ás ecuacións alxébricas, en expresión de Euler. A completitude significa que $\mathbb{R}$ enche toda a recta.

Cando se parte dunha definición axiomática de $\mathbb{R}$, a condición de completitude adoita establecerse mediante o Principio do Supremo. Este principio non se pode xeneralizar a $\mathbb{R}^p$, que non é un conxunto ordenado. Para transformalo, compróbase primeiro que é equivalente ao postulado dos intervalos encaixados. E deste postulado segue o teorema dos bloques encaixados en $\mathbb{R}^p$, que é unha forma de expresar o seu carácter completo. Del dedúcese o Teorema de Bolzano-Weierstrass, todo conxunto infinito e limitado en $\mathbb{R}^p$ ten un punto de acumulación, que se demostra polo método da caza do león. E, finalmente, derívase o criterio máis universal e tecnicamente máis eficaz de caracterizar a completitude, que afirma que toda sucesión de Cauchy é converxente.

Para iso hai que introducir previamente o concepto de sucesión de Cauchy. Como se vén de dicir, sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^p$ (un concepto métrico) é o mesmo que sucesión converxente (un concepto topolóxico). Pero esta equivalencia non se da sempre, non ocorre en $\mathbb{Q}$, por exemplo. De feito, o método de Cantor para construír $\mathbb{R}$ parte da consideración do conxunto de sucesións de Cauchy en $\mathbb{Q}$. As non converxentes van corresponder a puntos novos (*irracionais*, que non se deixan expresar como *razóns* de enteiros). En fin, ademais deste interese fundamental, o concepto de sucesión de Cauchy ten a vantaxe, fronte ao de sucesión converxente, de que para a súa formulación non se precisa coñecer o punto de converxencia. Así, permite saber que unha sucesión é converxente, sen necesiade de coñecer o seu límite.

Para mellorar a comprensión do concepto de completitude, no seu sentido xeométrico profundo, máis que na traducción técnica coa que operamos, haberá unha **lectura recomendada**:

Chinn-Steenrod (Vid. Referencias) *Completitud del sistema de números reales* (páx. 35-43)

Haberá un **test de avaliación** *on-line* sobre este tema e o anterior.

Tema 5: Continuidade

5.1 Definición de continuidade

5.2 Composición de funcións continuas. Restrición

5.3 Continuidade secuencial

EDUARD HEINE (1821-1881) estudou en Berlín con Weierstrass e máis tarde ensinou en Bonn e Halle. En 1872 probou que unha función continua con dominio un intervalo pechado é uniformemente continua. Tamén demostrou a equivalencia entre continuidade e continuidade secuencial.

A noción de continuidade podería considerarse como o concepto central da topoloxía. O obxecto mesmo da topoloxía adoita describirse como o estudo das propiedades que se conservan polas *transformacións continuas*. Doutra parte, no estudo de calquera estrutura matemática un ingrediente fundamental o constitúen as aplicacións compatíbeis con tal estrutura. Así, as aplicacións lineares no caso dos espazos vectoriais, ou os homomorfismos de grupos. Pois ben, ás estruturas topolóxicas corresponden as funcións continuas.

O tema comeza coa definición de continuidade e a consideración dos primeiros exemplos. Defínese a continuidade dunha función nun punto. É unha cuestión local, non depende exclusivamente do punto, pero si unicamente do que acontece “cerca” do punto. Os primeiros exemplos serán funcións moi regulares, para as que a continuidade se pode establecer dun xeito uniforme para todos os puntos do seu dominio de definición. Son as chamadas funcións uniformemente continuas. De contado se verá que non toda función continua é uniformemente continua.

O tema inclúe o primeiro teorema básico sobre funcións continuas: a composición de funcións continuas é unha función continua. É unha propiedade que se espera que verifiquen as funcións compatíbeis cunha determinada estrutura: cando dúas se poden compoñer, a composición debe ser aínda outra delas. Este marco, obxectos con determinada estrutura e aplicacións compatíbeis, coa anterior propiedade de composición (e un pouco máis), é o que se denomina *categoría*. Os espazos vectoriais e as aplicacións lineares forman unha categoría, os espazos topolóxicos e as funcións continuas forman unha categoría.

O tema péchase cun estudo da maior utilidade: a relación entre continuidade e converxencia de sucesións. Defínese a continuidade secuencial, unha propiedade das funcións a respeito das sucesións converxentes, e próbase que equivale á continuidade. Ademais do seu interese teórico, este feito proporciona un método moi eficaz para o estudo da continuidade de funcións. Utilizandoo será doado concluír sobre a continuiadade das funcións elementais que aparecen nos cursos de cálculo: polinomiais, trigonométricas, exponenciais, etc. Tamén é especialmente útil, en funcións complicadas, cando se quer concluír que a función non é continua nun punto dado do seu dominio.

Como aplicación da continuidade secuencial, estúdase un teorema de punto fixo para aplicacións contractivas de $\mathbb{R}^p$ en si mesmo, que é a base dun método de cálculo aproximado de solucións, considerado na materia de *Cálculo numérico nunha variábel*, do segundo ano do Grao.

Tema 6: Continuidade Global

6.1 Caracterización global da continuidade

6.2 Función combinada

MAURICE FRÉCHET (1878-1973) formulou por primeira vez, en 1906, o concepto de espazo métrico (aínda que non utilizou ese nome, que se debe a Hausdorff). Foi profesor nas universidades de Poitiers, Strasbourg e Paris. Ademais do seu traballo na fundamentación dos espazos topolóxicos abstractos, fixo importantes contribucións en estatística, probabilidades e cálculo. En 1907 descubríu un importante teorema de representación integral, demostrado independentemente por Riesz.

Normalmente imos utilizar funcións que son continuas en todo o seu dominio de definición. De feito, os principais resultados que enunciaremos como aplicación da teoría desenvolta no curso teñen que ver con funcións continuas globalmente. Tanto a definición de continuidade como a de continuidade secuencial refírense a condicións a cumprir para cada punto. Para o tratamento da maioría de cuestións teóricas non resulta axeitado o uso desas condicións. O principal obxectivo deste tema é o establecemento dun teorema que contén varias caracterizacións globais da continuidade. En particular, verase como a continuidade se pode caracterizar dunha forma simple e eficaz utilizando unicamente a noción de conxunto aberto.

O tema compleméntase co estudo da continuidade das *funcións combinadas*, funcións definidas "a trozos", mediante distintas correspondencias en distintas partes do dominio. Con isto, disponse de todas as ferramentas necesarias para abordar os problemas de continuidade que se presentan no curso.

Como corresponde á súa importancia dentro do programa, a estes temas de continuidade adícase moito tempo, no que se estudan moitas funcións. Neste momento débese ter progresado netamente na capacidade de manexar e coñecer funcións, e discutir as súas propiedades de continuidade.

Ao remate do tema realizarase un **obradoiro** sobre continuidade.

Tema 7: Propiedades topolóxicas

7.1 Homeomorfismos.

7.2 Propiedades topolóxicas

FELIX HAUSDORFF (1868-1942) ensinou nas universidades de Leipzig e de Bonn. Comezou traballando en astronomía e óptica, aínda que o seu principal interese sempre foi a literatura e a filosofía, escribindo algúns libros de filosofía e de poemas. En 1904 comezou a traballar en topoloxía e teoría de conxuntos. Introducíu o concepto de conxunto parcialmente ordenado. A el se debe a definición axiomática moderna de espazo topolóxico, quen a formulou nun libro famoso sobre teoría de conxuntos e topoloxia, *Grundzüge der Mengenlehre*, publicado en 1914. A persecución nazi levouno á morte, a el e á súa familia.

É doado dar unha idea intuitiva do que é o obxecto da topoloxía. Nunha monografía clásica, do ano 1955 (J.L. Kelley, *Topología General*, Editorial Eudeba, Buenos Aires), o autor afirma, a pé de páxina: *Un topólogo é un señor que non sabe a diferencia entre un dónuts e unha taza de café.* (Non se refire ás topólogas, seguramente porque nunca foron tan inútiles). Tamén se di que sabe (que se pode) quitar a camiseta sen se quitar a camisa.

Neste momento do curso disponse dos recursos necesarios para dar unha resposta máis elaborada de cal é o obxecto da topoloxía, cales son as propiedades que estuda. E ista é a finalidade deste tema, sen pretender demorarse moito nelo.

Para iso é necesario introducir o concepto de *homeomorfismo*, o que de forma imprecisa nunha páxina anterior denominamos "transformación continua". E da man de homeomorfismo, o concepto de *propiedade topolóxica*. A conexidade e a compacidade, que se van a estudar nos temas seguintes, son propiedades topolóxicas.

O tema compleméntase cunha **lectura recomendada**:

R. Courant, H. Robbins *¿Qué es la Matemática?* Cap. V: Topología.
Editorial Aguilar, 1962.

O finalizar o tema ofrecerase un **test de avaliación** *on-line.*

Tema 8: Conexidade

8.1 Espazos conexos

8.2 O Teorema do valor intermedio

BERNARD BOLZANO (1781-1848) foi profesor de filosofía da relixión en Praga. Tiña profundos coñecementos de matemáticas e foi, como Cauchy, un pioneiro na introducción dun alto standard de rigor na análise matemática. O *Teorema do valor intermedio* débese a el. Escribiu un tratado sobre os paradoxos do infinito, que apareceu despois da súa morte.

A conexidade aborda unha cuestión xeometricamente intuitiva. Algúns conxuntos poden separarse en partes de forma natural. Por exemplo, o conxunto formado por dúas rectas que non se cortan. As veces poden separarse de forma natural, de moitas maneiras diferentes. Por exemplo, os números racionais, considerando os menores e os maiores que un número irracional dado. Outros conxuntos non admiten separacións deste tipo. Por exemplo, un intervalo de números reais. A noción de conexidade vai dar un tratamento rigoroso e formal a este tipo de cuestións.

Unha motivación inmediata para nós vai ser, de novo, un teorema de Análise: o que afirma que unha función real continua con dominio un intervalo, se alcanza dous valores, alcanza calquera valor intermedio. A conexidade vai dar a resposta máis xeral a esta cuestión: poderase substituir intervalo por dominio conexo.

Hai varias formas, non sempre equivalentes, de abordar a cuestión da conexidade. Nós imos utilizar o método máis simple e concreto, que parte do concepto de *camiño*. Se para cada dous puntos dun conxunto existe un camiño nel entre un e outro, dirase que o conxunto é conexo. En particular, todo intervalo, e todo subconxunto convexo de $\mathbb{R}^p$, será conexo.

Demóstrase despois un teorema básico, a imaxe continua dun conxunto conexo é un conxunto conexo. E considéranse varios pequenos resultados técnicos que permiten concluír sobre o carácter conexo dos exemplos que se manexan.

De seguido demóstrase, na súa xeneralidade, o Teorema do Valor Intermedio, e dedúcense algunhas aplicacións. Como, por exemplo, que todo polinómio de grao impar con coeficientes reais ten cando menos unha raiz real. Ou que non existe ningunha función continua inxectiva de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Ou esta outra: no planeta, en cada instante, existen dous lugares antípodas con exactamente a mesma temperatura (e mesmo unha infinidade deles).

Para comprender mellor o interese e potencia do Teorema do Valor Intermedio, prográmase unha **lectura recomendada**:

Chinn-Steenrod (Vid. Referencias) *Primer teorema de existencia* (páx. 3-8 e 76-85)

Tema 9: Compacidade

9.1 Compacidade. Compacidade secuencial

9.2 Caracterización dos conxuntos compactos no espazo euclidiano

9.3 O Teorema do máximo e do mínimo

9.4 Continuidade uniforme

9.5 Conxuntos compactos e conexos

Émile Borel (1871-1881) estudante de Hermite, foi profesor en París e un dos matemáticos máis influíntes da súa época. Fixo numerosas e profundas contribucións a análise e probabilidade. En 1895 probou que se unha colección enumerábel de intervalos abertos é cobertura dun intervalo pechado, entón ten unha subcobertura finita.

En Análise estudouse que unha función real continua con dominio un intervalo pechado alcanza o mínimo e o máximo. Esta importante propiedade non é exclusiva destas aplicacións, vai ser certa en moitas situacións comúns. A demostración deste resultado coñeceu moitas etapas, comezando cos traballos de Cauchy. Baséase na seguinte propiedade dos intervalos pechados: toda cobertura por conxuntos abertos admite unha subcobertura finita. Non debe sorprender que a propiedade topolóxica dos intervalos pechados así expresada, a chamada condición de Borel-Lebesgue, se convertira nunha nova noción en topoloxía, a compacidade. Na súa versión actual, a noción de compacidade foi introducida pola escola rusa, alá por 1920, con Aleksandroff á cabeza, e desenvolta por Bourbaki, despois, con nomes algo diferentes.

Así, un conxunto compacto vai ser un conxunto que verifique a condición mencionada para coberturas abertas. Unha definición moi abstracta, culminación dun longo proceso que parte de enunciados moito máis concretos, como a propiedade citada das funcións reais continuas, ou o Teorema de Bolzano-Weierstrass, estudado no Tema 3. A noción de compacidade ten hoxe unha extraordinaria relevancia, especialmente en análise e topoloxía. Pero non só, e así, por exemplo, o uso da compacidade en lóxica permite concluír que unha teoría é consistente (ou sexa, non conduce a resultados contraditorios) se, e soamente se, calquera conxunto finito de proposicións da teoría é consistente.

A definición dada, utilizando coberturas abertas, é a única válida ao traballar en espazos abstractos. Pero en marcos máis restrinxidos hai definicións que resultan equivalentes e que son máis manexables. Tal é o caso dos espazos euclidianos, onde, unha vez máis, a converxencia de sucesións resulta unha ferramenta eficaz na caracterización dunha propiedade topolóxica. Esta caracterización coñécese co nome de compacidade secuencial.

Un dos obxectivos do tema será describir os subconxuntos compactos de $\mathbb{R}^p$. Van ser precisamente os conxuntos pechados e limitados. É unha caracterización moi simple, pero que ten serios inconvenentes: non é intrínseca nen topolóxica, non é válida noutros espazos, mesmo subespazos de $\mathbb{R}^p$, non é eficaz para deducir propiedades.

O tema continúa co estudo da relación entre continuidade e compacidade. Poderemos concluír que a compacidade é unha propiedade topolóxica e que, como ocorría para o intervalo pechado, toda función real continua con dominio compacto alcanza o máximo e o mínimo.

Outro importante teorema de Análise que verifican as funcións continuas con dominio un intervalo pechado vaise xeneralizar a dominios compactos arbitrarios: toda función continua con dominio compacto é uniformemente continua.

Péchase o tema coa consideración de propiedades de conxuntos a un tempo compactos e conexos, e algunhas aplicacións, neste marco, da teoría estudada. Moitas terán a forma de teorema de punto fixo, ou serán consecuencias dun teorema deste tipo. Por exemplo, toda función continua de un intervalo pechado en si mesmo ten un punto fixo, un caso particular dun Teorema debido a Brouwer.

A seguinte **lectura recomendada**, que ten relación có Teorema de Brouwer, axuda a recapitular sobre as principais nocións estudadas ao longo do curso:

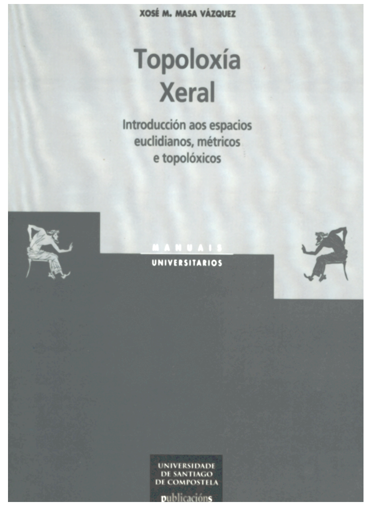
Buskes-van Rooij(Vid. Referencias) *Curves in the Plane* (Cap. 4)

Realizarase un **obradoiro** sobre aplicacións da teoría estudada ao longo do curso.

Referencias

Referencia principal:

MASA VÁZQUEZ, X.M. ***Topoloxía xeral. Introducción aos espacios euclidianos, métricos e topolóxicos***. Manuais universitarios, 1. Universidade de Santiago de Compostela, 1999.



Trátase dun texto escrito polo profesor do curso, que desenvolve os contidos da materia no nivel da Licenciatura. Os primeiros capítulos adícanse ao estudo da topoloxía dos espazos euclidianos, cos mesmos criterios que os utilizados no curso. Será a nosa referencia principal.

Outras referencias:

1. BARTLE, R.G. *Introducción al Análisis Matemático.*
   Ed. Limusa. México, 1980

   Trátase dun magnífico texto para un curso de análise de funcións reais de varias variábeis. Contén unha introducción moi completa á topoloxía dos espazos euclidianos, orientada ás necesidades da análise, con moitas indicacións suxerentes para o estudo.

2. BUSKES, G. and van ROOIJ, A. *Topological Spaces: From Distance to Neighborhood.*
   Springer-Verlag. New york, 1997

   Unha mirada nova e suxestiva dos primeiros conceptos de topoloxía. A primeira parte aborda cuestións do programa da materia, e a súa lectura é amena e moi instructiva. O texto está en inglés, coma o último que se propón, o que non supón, en matemáticas, unha excesiva dificultade (aínda que este en particular non é dos máis fáciles). En todo caso, resulta imprescindíbel coñecer a nova *lingua franca* da ciencia (e do turismo, p.e.)

3. CHINN, W.G. and STEENROD, N.E. *Primeros conceptos de Topología.* Ed. Alhambra, 1975

Steenrod foi un gran topólogo e a súa mestría reflíctese nas páxinas deste libro, tan elemental como interesante. Aborda, cunha perspectiva algo diferente á nosa, moi xeométrica e pouco formalizada, a maioría dos contidos do programa. Polas súas explicacións, as aplicacións xeométricas que analiza, a profundidade que consigue, sen deixar de ser elemental, é de lectura obrigada.

4. SUTHERLAND, W.A. *Introdution to metrics and topological spaces.* Clarendon Press. Oxford, 1975.

Dentro da súa brevidade, é unha das mellores introduccións ao estudo dos espazos topolóxicos. Os contidos e nivel de abstracción sobrepasan os do programa da materia, pero resultará do maior interese ler neste libro algúns temas ou algunha demostración.

Indicacións metodolóxicas

Ensinar a quen non quer aprender é como sementar un campo sen aralo.

Richard Whately (1787-1863) Educador británico

Traballo na aula e materiais

Na aula, nas diversas sesións que de seguido se describen, se abordarán os principais contidos da materia, tanto teóricos como prácticos. Preténdese unha exposición selectiva, en función de parámetros como importancia e dificultade. Non exhaustiva. As notas de clase poderán ser unha boa ferramenta de traballo, pero precisarán o complemento doutras fontes, especialmente bibliográficas.

Ao longo do curso estarán dispoñíbeis outros recursos. Existe un ***curso virtual*** de apoio, que se describe brevemente na última páxina desta Guía. Periodicamente entregarase diverso material de estudo, particularmente, ***Boletíns*** de exercicios e ***Guías de estudo***. Os Boletíns conteñen exercicios sobre cada tema, son propostas de traballo ordinario, que se resolverán nas sesións de titorías, segundo se refire máis abaixo. En canto ás Guías, despois dunha breve presentación na aula, cada estudante traballará determinados conceptos, coa axuda do texto-guía, e despois se discutirán nunha sesión especial.

O Plan de Estudos do Grao en Matemáticas estrutura o traballo presencial en catro tipos de sesións:

Clases do grupo completo (3 créditos). Son as sesións adicadas ao desenvolvemento teórico da materia. Trátase, fundamentalmente, de leccións impartidas polo profesor. De ordinario, nunha mesma sesión adicarase un tempo á exposición ou ilustración de algunha cuestión teórica, e outro tempo á resolución de problemas ou exercicios. As veces, o modelo achegarase ao da lección maxistral, as veces procurarase a implicación de todo o alumnado na discusión das cuestións suscitadas.

Clases en grupo reducido (1,5 créditos). Preténdese unha maior participación activa das e dos estudantes. Poderá ter formatos diversos, as veces serán talleres de exemplos e aplicacións da teoría estudada, ou se discutirá un texto, tal vez unha lectura recomendada, as veces abordaranse cuestións preparadas polos estudantes, non explicadas previamente. Nestes casos, utilizaranse guías de estudo, que inclúen motivación, definicións, exemplos, algún resultado con indicación da súa demostración, exercicios, referencias bibliográficas, etc. En xeral, terá unha orientación moi práctica.

Titorías en grupos reducidos (1,3 créditos). Nestas sesións preténdese a participación activa das e dos estudantes. Nelas non se introduce materia nova, e teñen diversos deseños. Para as sesións máis usuais, digamos, as sesións ordinarias, fórmanse equipos de, por término medio, 3 ou 4 estudantes. Cada sesión será conducida por un equipo designado previamente, ao que se lle propoñen diversos exercicios ou problemas que terá que preparar, para despois expoñer e discutir na aula. Estes exercicios aparecen nos ***Boletíns*** que se entregan para cada tema. Con anterioridade á sesión, o equipo acudirá a unha ***titoría en grupos moi reducidos***, á que se concede grande valor. Nela preténdese acadar unha boa comprensión das cuestións a expoñer, detectar carencias ou dificultades e favorecer que o traballo do día seguinte resulte áxil e eficaz para o conxunto. Normalmente cada equipo terá que actuar en dúas sesións de este tipo.

Haberá outros tipos de sesións en grupos reducidos. Segundo a programación proposta nas páxinas anteriores, 3 adícanse a ***obradoiro***. Os obradoiros son sesións monográficas, sobre cuestións de especial interese, deseñadas de xeito que participen a totalidade dos asistentes. Os dous primeiros (un no Tema 3, outro no Tema 6), buscan asentar o coñecimento de determinados conceptos, resultados ou técnicas sobre os que se leva un tempo traballando, e que son imprescindíbeis no que segue. O terceiro, ao final do curso, traballará as aplicacións de toda a teoría estudada, co ánimo de reafirmar o sentido da materia. Para preparar estes obradoiros entrégase material con exercicios curtos, pequenas cuestións, todo moi interrelacionado, de forma que todo o mundo poida intervir. Cada quen terá que preparar todo o material proposto.

Vencelladas ás guías de estudo programarase algún *Taller sobre técnicas de estudo*, que poida detectar e correxir vicios na forma de estudar matemáticas.

Titorías en grupos moi reducidos (0,2 créditos). Adicaranse, de forma individual ou en grupos, a resolver as dúbidas e dificultades particulares que vaian xurdindo, e ao seguimento individualizado de cada estudante. En ocasións se programarán, tal como se indica arriba, vencelladas á exposición de exercicios na aula.

Naturalmente, ademais destas sesións de titorías, cada estudante, por propia iniciativa, poderá acudir ao despacho do profesor, nas horas reservadas a tal efecto.

Ao longo do curso propoñeranse, asemade, un certo número de ***lecturas***. Terán o carácter de lecturas recomendadas, de interese para se achegar á bibliografía da materia, para coñecer outros enfoques, outros discursos. Eventualmente se poderá demandar a entrega dun comentario sobre as mesmas (a título orientativo, un comentario podería ter entre 150 e 300 palabras), ou podería ser tema de discusión dalgunha sesión na aula.

Por último, de entre todos os ***exercicios*** propostos ao longo do curso, cada estudante deberá entregar 4 por escrito, tres correspondentes a cada un dos tres primeiros bloques temáticos, un correspondente a calquera dos dous últimos temas.

Estimación da carga de traballo

A seguinte táboa recolle a estimación da carga de traballo feita no Plan de Estudos:

TRABALLO PRESENCIAL		**TRABALLO PERSOAL**	
Clases en grupo grande	30	Estudo autónomo	65
Clases en grupo reducido	15	Escritura de exercicios ou outros traballos	15
Titorías en grupo reducido	13	Lecturas recomendadas ou similar	10
Titorías en grupos moi reducidos	2		
Total horas traballo presencial	60	Total horas traballo persoal	90

Recomendacións para o estudo da materia

No curso adícase moito tempo á resolución de exercicios. Obviamente, considérase un aspecto fundamental na aprendizaxe da materia. Isto non debe conducir a pensar que a teoría ten menos importancia: ben ao contrario, a teoría é a pedra angular da formación. Haberá que manexar certo número de definicións e resultados, que se terán que asimilar nun periodo breve de tempo. As demostracións dos resultados axudan a comprendelos mellor e permiten familiarizarse coas técnicas máis importantes; deben constituír un dos compoñentes fundamentais do estudo da asignatura. O outro, certamente, será o empeño na resolución dos exercicios.

Indicacións sobre a avaliación

Moitos profesores gastan o tempo facendo preguntas para descubrir o que non sabe o alumno, cando a verdadeira arte de preguntar ten como finalidade coñecer o que o alumno sabe ou e capaz de aprender.

A. Einstein, 1920

Haberá un dobre sistema de avaliación: a avaliación puntual, realizada mediante o exame final, e a avaliación continuada, realizada ao longo do curso, en base á participación activa na aula e aos traballos realizados.

A cualificación da materia en ningún caso será inferior á obtida no exame final. A única limitación neste sentido é que para obter a cualificación de *Matrícula de Honra* será necesario ter participado regularmente nas actividades programadas.

O exame final consistirá nunha proba escrita. Terá unha parte de teoría, aproximadamente entre o 40% e o 60% da proba, que pode incluír definición de conceptos, presentación e discusión de exemplos, enunciado de resultados e proba total ou parcial dos mesmos. O resto do exame consistirá na resolución de exercicios, que serán análogos aos propostos ao longo do curso. O exame procura avaliar os coñecementos teóricos adquiridos, a capacidade de resolución de problemas e, moi especialmente, a adquisición das competencias enunciadas no programa. Para quen non teña participado nas actividades realizadas ao longo do curso, o exame podería ter un complemento oral.

Para a avaliación continuada o profesor irá seguindo, día a día, o proceso de aprendizaxe de cada estudante. A base desta avaliación será a participación na aula, as actuacións no encerado nas sesións de grupos reducidos, os traballos entregados e a discusión dos mesmos, os tests da avaliación (na aula e on-line), etc. Este proceso determinará un factor de incremento da nota obtida no exame final, factor comprendido entre 1 e 1,35. Este factor poderá ser coñecido por cada estudante antes da realización do exame final, ao remate do período de clases.

Outras informacións de interese

Recursos virtuais

Está disponíbel na USC Virtual (http://www.usc.es/campusvirtual/) un ***curso virtual*** relativo ao programa da materia. Trátase dun curso de apoio á docencia presencial. O material que se ofrece é complementario, ten como principal obxectivo facilitar o traballo de autoaprendizaxe de cada estudante. Irase construíndo ao longo do curso, polo que estas consideracións iniciais poden mudar. O groso do curso consistirá en Leccións sobre diversos temas e conceptos. Terán unha orientación moi práctica, sen pretender substituír ás referencias bibliográficas nen ao traballo na aula, aínda que haxa certo solapamento con este.

Ofrécese, tamén, un amplo conxunto de recursos online, que abranguen definicións e resultados principais, coleccións de problemas con indicacións para a súa resolución, exames propostos en anteriores convocatorias, etc.

Inclúe un ***Manual*** de referencia, unha breve recompilación das definicións dos principais conceptos estudados e os enunciados dos resultados máis importantes. Ademais de servir de referencia, pode constituír un guión útil do desenvolvemento previsto do programa.

Outra sección é o ***Seminario***, colección de todos os exercicios propostos nos cinco primeiros capítulos do manual Topoloxía Xeral, referencia principal da asignatura, correspondentes á materia do programa, con indicacións para a súa resolución.

No ***Taller*** pódense encontrar, agrupados por temas, diversos materiais de traballo: cuestións orientadas á comprensión dun concepto, erros frecuentes, novos exercicios, argumentacións incorrectas tomadas de exames,... En xeral, con cada enunciado ofrécese algunha axuda ou indicación, non demasiado explícita. Algún deste material está xa incorporado no curso desde o inicio; outro irase incorporando sucesivamente.

Existe asemade unha colección de ***Guías de estudo*** para os conceptos máis importantes, a modo de reforzo, para temas que se espera traballen autonomamente os estudantes, e algúns outros complementarios, fora de programa.

Irán incorporándose, no seu momento, outros recursos, como tests de avaliación, calendario, etc.