USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GUÍA DOCENTE

Materia:	Grupos de Lie
Código:	091482
Titulación:	Licenciatura en Matemáticas
Curso:	Segundo ciclo: 4º/ 5º
Carácter:	optativo
Profesor:	Enrique Macías Virgós
Departamento:	Xeometría e Topoloxía

Descripción da materia

Descriptores no Plano de Estudios: Subvariedades. Teorema de Frobenius. Grupos de Lie. Alxebras de Lie. Espazos Homoxéneos.

Presentación: Iniciada polo matemático noruegués M. Sophus Lie a finais do século XIX, a «Teoría de Lie» xoga un papel central nas matemáticas actuais, tanto polo seu interese teórico como polas suas aplicacións.

O obxecto fundamental é o «grupo de Lie», é decir un grupo que ten estructura de variedade de xeito que a operación producto é diferenciable. De ahí que o seu estudo sexa unha encrucillada da xeometría e a álxebra. De feito, cando se lineariza a operación de grupo, aparece un obxecto alxébrico moito máis sinxelo, a «álxebra de Lie», que codifica case toda a información do grupo. A información restante queda condensada no chamado «grupo fundamental» que se estuda en Topoloxía. O paso inverso, da álxebra de Lie ó grupo, realízase mediante unha xeneralización da aplicación exponencial.

Xeométricamente, o interese do grupos de Lie está en cando «actúan» sobre algunha variedade, de xeito análogo a como as rotacións transforman o espazo euclidiano. De ahí o nome de «grupo continuo de transformacións» que ás veces se usa. Cando esta acción permete desprazarse sen restriccións dun lugar a outro aparece a noción de «espazo homoxéneo», de enorme importancia en física teórica.

As técnicas que usaremos no curso son, fundamentalmente, as xa coñecidas de xeometría diferencial de variedades, que necesitaremos completar cun resultado importante de integración de ecuacións en derivadas parciais: o teorema de Frobenius.

Número de créditos teóricos e prácticos: 4 teóricos e 2 prácticos

Obxectivos:

- Coñecer as nocións fundamentais e as ferramentas básicas da teoría de Lie e dos espazos homoxéneos.
- Aprender a realizar cálculos de álxebras de Lie e aplicacións exponenciais.
- Ampliar os coñecementos sobre variedades co Teorema de Frobenius.

Programa da parte teórica e práctica.
Desenvolvemento do temario:

1 <u>Grupos de Lie:</u> Definicións básicas e primeiros exemplos. Grupos de matrices. Producto directo e semidirecto. Propiedades topolóxicas dos grupos de Lie. Compoñentes conexas. Relación de equivalencia asociada a un subgrupo. Espazos cociente.

1. <u>Álxebras de Lie:</u> Definición e primeiros exemplos. A álxebra de Lie asociada a un grupo de Lie: campos de vectores invariantes. Cálculo de exemplos. Constantes de estructura. Morfismos de álxebras de Lie. Morfismo inducido por un morfismo de grupos de Lie.

2. <u>A aplicación exponencial:</u> A exponencial de matrices. Propiedades. Curvas integrais de campos de vectores completos. Campos de vectores invariantes en GL(n,$\mathbb{R}$). A aplicación exponencial dun grupo de Lie. Propiedades. Diferencial da exponencial. A representación adxunta dun grupo de Lie e dunha álxebra de Lie. Aplicacións.

3. <u>Subgrupos de Lie:</u> Subvariedades inmersas, embebidas e débilmente embebidas. Definición e exemplos. Subgrupos pechados. Subálxebras de Lie. O teorema de Cartan. Coordenadas canónicas de primeira e segunda especie.

4. <u>O teorema de Frobenius:</u> Fluxo dun campo de vectores sen singularidades, existencia de cartas adaptadas, campos de liñas. Distribucións. Subvariedades integrais. Distribucións involutivas. Cartas adaptadas. Demostración do teorema de Frobenius. Correspondencia entre subálxebras de Lie e subgrupos de Lie conexos.

5. Espazos homoxéneos: Subgrupos pechados: estructura diferenciable do cociente. Propiedades. Accións de grupos de Lie sobre variedades. Órbitas. Subgrupos de isotropía. Espazos homoxéneos. Accións transitivas. Exemplos.

6. Cubertas: Nocións de homotopía e grupo fundamental. Cubertas. Propiedades de levantamento. Cuberta universal. Grupos de Lie simplemente conexos. Subgrupos discretos centrais. Estructura de grupo de Lie das cubertas. Clasificación dos grupos de Lie asociados a unha álxebra de Lie. Correspondencia entre morfismos de álxebras de Lie e de grupos de Lie.

7. Complementos: Cartas de Cayley. Cuaternios. Estudio de $U(2)$. Estudio de $SO(3)$. Estudio de $SO(4)$. Estudio de $SL(2,\mathbb{R})$. Estudio de $Sp(2)$. Existencia de grupos non matriciais. Grupos abeliáns. Grupos nilpotentes. Formas invariantes nun grupo de Lie. Cálculo da álxebra de Lie dun grupo de Lie matricial coa forma de Maurer-Cartan. Subgrupos non pechados. Terceiro teorema de Lie: o problema da existencia de grupos de Lie asociados a unha álxebra de Lie.

Material

Bibliografía recomendada, básica e complementaria

1. Bourbaki, Nicolas: *Lie groups and Lie algebras*. Chapters 1–3. Elements of Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1989. xviii+450 pp. (hai versión francesa). `[Un libro de referencia, por riba do nivel deste curso]`

2. Carter, R.; Segal, G.; MacDonald, I. : *Lectures on Lie groups and Lie algebras*. Student Texts 32, London Mathematical Society, 1995. `[Varios exemplos interesantes]`

3. Chevalley, Claude : *Theory of Lie groups*. I. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1946, 1957. xi+217 pp. `[Este foi o primeiro libro que se escribiu de Grupos de Lie dun xeito moderno, é decir cun ponto de vista global]`

4. Helgason, Sigurdur: *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. Pure and Applied Mathematics, 80. Academic Press, Inc., New York-London, 1978. xv+628 pp. `[Por riba do nivel deste curso, é unha boa leitura complementaria]`

5. Mneimné, Rached; Testard, Frédéric : *Introduction a la théorie des groupes de Lie classiques*. Collection Méthodes. Hermann, Paris, 1986. vi+346 pp. `[Un libro cheo de exemplos interesantes]`

6. Postnikov, M.: *Lie groups and Lie algebras. Lectures in geometry. Semester V.* Ed. «Mir», Moscow, 1986. 440 pp (hai versión francesa) `[Axústase ben ó curso e ten temas complementarios]`

7. Shapukov, B. N.: Guía práctica. *Grupos y álgebras de Lie*. Editorial URSS (2001). `[Un libro de problemas]`

8. Varadarajan, V. S.: *Lie groups, Lie algebras, and their representations*. Graduate Texts in Mathematics, 102. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1984. xiii+430 pp. `[É un libro de referencia, pero por riba do nivel deste curso]`

Outro material docente:

- Boletíns de problemas.
- Páxinas web de interese
- Biografías (S. Lie, F. Klein, W. Hamilton, É. Cartan, G. Frobenius, A. Cayley, W. Heisenberg, C. Chevalley) na páxina web «Mac Tutor» da Universidade de St. Andrews en Escocia
  `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/`

Metodoloxía

Criterios e sistemas de avaliación

- Traballo na clase. Os alumnos asistirán a tres horas teóricas por semana. A cuarta hora será de problemas, previamente propostos polo profesor, que os alumnos prepararán previamente e resolverán por turno no encerado.

- Exposición individual dun tema (15–20 min.). Nas últimas semáns do curso, cada alumno preparará unha exposición breve sobre un tema previamente acordado e discutido co profesor. Os temas referiránse a aspectos complementarios non tratados durante o curso.

- Exame escrito de problemas. Un exame de cinco problemas, só se non se fixeron regularmente os boletíns ao longo do cuadrimestre.

Titorías O profesor estará a disposición dos estudiantes, para resolver dúbidas ou comentar aspectos relacionados coa materia, durante seis horas de titoría por semán, en horario que se avisará ó comezo do curso.

Recomendacións para o estudo da materia A asistencia regular a clase e a preparación dos problemas propostos considérase parte esencial do proceso de formación.

O tempo de estudo e de traballo persoal que se estima necesario para preparar esta materia equivale a 6 ECTS:

Asistencia a clase teórica	3 horas/semán	45h
Asistencia a clase de problemas	1 hora/semán	15h
Estudo da teoría	2h/semán	30h
Preparación problemas	3h/semán	45h
Preparación exposición		10h

Total		145h

Competencias, destrezas e habilidades

Prerrequisitos. Os grupos de Lie son un campo no que converxen técnicas da xeometría diferencial (variedades diferenciabeis, campos de vectores, formas diferenciais), de topoloxía xeral (espazos localmente euclidianos, espazos compactos, propiedades de separación e conexión), álxebra (álxebra linear, álxebras asociativas, corpos e aneis non conmutativos) e análise (espazos normados, funcións analíticas).

Materias que se aconsella cursar previamente: Xeometría e Topoloxía (variedades). Topoloxía (topoloxía xeral).

Contexto dentro da titulación. Trátase dunha materia optativa do segundo ciclo, para estudiantes cunha base adecuada en xeometría e topoloxía, interesados en coñecer unha das materias fundamentais da matemática pura, na que aplicarán moitas das técnicas aprendidas ao longo da carreira. A asignatura da unha boa base para estudar posteriormente aplicacións á física (mecánica cuántica, teoría do sinal, relatividade).

Competencias a adquirir polos estudiantes.

1. **Competencias transversais ou xenéricas:**
   - *a*) Competencias instrumentais: capacidade de análise e de síntese; capacidade de organización e planificación; comunicación oral e escrita; resolución de problemas; manexo de bibliografía.
   - *b*) Competencias personais: traballo en equipo; razonamiento crítico; aprendizaxe autónoma; creatividade.
2. **Competencias específicas:**
   - *a*) Competencias procedimentais e instrumentais: interpretación de solucións; detección de erros lóxicos nun razonamento; elaboración dun modelo matemático da realidade física; habilidade para argumentar e expresarse de forma coherente e intelixible, e expoñer resultados en público
   - *b*) Competencias actitudinais: capacidade de abstracción; rigor; interese polas matemáticas e as suas aplicacións; relación con outras disciplinas;

Destrezas e habilidades cognitivas.

1. Coñecer someramente
   - as orixes da teoría («teoría de grupos continuos» de Sophus Lie para a resolución e discusión de ecuacións diferenciais por medio do estudo das súas simetrías, de xeito análogo á teoría de Galois para as ecuacións alxébricas);
   - a súa interpretación xeométrica (o «Erlanger programm» de Félix Klein, sobre cómo caracterizar e clasificar as xeometrías mediante a teoría de grupos);
   - idea da súa evolución histórica (traballos de Lie-Engel sobre grupos de transformacións; clasificación de Cartan-Killing; traballos de H. Weyl e relatividade; C. Chevalley e o grupo Bourbaki).
2. Ter unhas primeiras novas elementais da existencia de aplicacións da teoría:
   - matrices de Pauli en mecánica cuántica;
   - variedades simplécticas e corchete de Poisson en mecánica hamiltoniana
   - teorema de Noether sobre simetrías en mecánica lagranxiana
   - teorías «gauge» e o modelo estándar en física de partículas
   - o grupo de Lie excepcional E_8 e a unificación das forzas electromagnética, forte, débil e gravitatoria
   - grupo de Poincaré no espazo-tempo de Minkowski
   - espazos homoxéneos en relatividade e cosmoloxía
   - xeometría integral, transformada de Radon e tomografía axial computerizada (TAC)
   - o grupo de Heisenberg no deseño de radares, procesamento do sinal e codificación en CDs
3. Coñecer as posibles continuacións do curso en Teoría de Lie e en Xeometría de Riemann:
   - estructura e clasificación das álxebras de Lie
   - clasificación dos grupos de Lie semisimples

- grupos de Lie de dimensión infinita
- teoría de representacións
- espazos simétricos
- xeometría integral

4. Coñecementos e habilidades específicas como:

    - coñecer os exemplos básicos de grupos matriciais clásicos (ortogonal, unitario, simpléctico); coñecemento das propiedades topolóxicas dun grupo de Lie
    - cálculo da álxebra de Lie asociada a un grupo de Lie e das suas constantes de estructura (tanto a partir dos campos de vectores invariantes como da forma de Maurer-Cartan)
    - cálculo da aplicación exponencial, tanto de matrices como a partir do fluxo dun campo de vectores
    - correspondencia entre subálxebras e subgrupos a partir do teorema de Frobenius; propiedades dos subgrupos pechados; cálculo a partir do teorema de Cartan
    - clasificación dos grupos de Lie correspondentes a unha mesma álxebra de Lie; cálculo do grupo fundamental
    - coñecer os exemplos usuais de espazos homoxéneos: esferas, espazos proxectivos, variedades de Grassmann e de Stiefel;
    - cálculo das órbitas e grupos de isotropía dunha acción; propiedades dos espazos homoxéneos