Dinámicas no espacio de Gromov

Jesús A. Álvarez López
Alberto Candel

Comenzarase por recordar a definición e propiedades elementais do espacio $\mathcal{M}_*$, introducido por Gromov, cuios puntos son as clases de isometría de espacios métricos completos localmente compactos con punto distinguido. A topoloxía de $\mathcal{M}_*$ defínese usando a distancia de Gromov-Hausdorff (G-H) entre bolas centradas nos puntos distinguidos, que pola súa parte se define usando a distancia de Hausdorff entre subespacios de espacios métricos. Algúns subespacios importantes de $\mathcal{M}_*$ son os dados por: variedades Riemannianas, CW-complexos, grafos e grupos finitamente xerados. En $\mathcal{M}_*$ e neses subespacios téñense as seguintes dinámicas naturais:

- A da *relación de equivalencia canónica*, obtida o variar o punto distinguido. É transitiva (existen clases densas), e o correspondente cociente está formado polas clases de isometría de espacios métricos.
- A da *relación de equivalencia de G-H*, definida requerindo que a distancia de G-H global seña finita. Tamén é transitiva, e o correspondente cociente de $\mathcal{M}_*$ está formado polas clases de espacios métricos con distancia de G-H finita entre elas.
- A da *relación de equivalencia quasi-isométrica*, definida pola existencia de quasi-isometrías. Tamén é transitiva, e o correspondente cociente está formado polas clases de quasi-isometría de espacios métricos.
- A do fluxo en $\mathcal{M}_*$ definido o multiplicar cada métrica por un parámetro positivo λ. Tamén é transitivo, e os seus conxuntos límites en certa compactificación de $\mathcal{M}_*$ son os *conos asintóticos* e *conos tanxentes*.

Explicaranse algúns avances conseguidos na comprensión destas dinámicas. Por exemplo, que as relacións de G-H e quasi-isométrica cumplen certa propiedade dinámica chamada *turbulencia*, que implica a inexistencia de "casificación numerable" nun sentido medible; ainda máis, próbase que calquer aplicación medible "equivariante" de $\mathcal{M}_*$ o espazo de estructuras numerables é constante nalgún subconxunto residual. Sen embargo, para a relación canónica, ningún subespacio saturado é turbulento, polo que se espera probar a existencia de clasificación numerable nese caso.

O concepto de turbulencia e as súa relación ca clasificación numerable foi estudada por Hjorth e Kechris para accións de grupos polacos en espacios polacos. Pero probamos que as relacións de G-H e quasi-isométrica en $\mathcal{M}_*$ non se poden dar por tales accións, polo que o estudo de Hjorth e Kechris non se aplica. Posiblemente, a relación canónica tampouco seña dada por tal acción. Por tanto tívose que desenrrolar unha teoría mais xeral de turbulencia, na que xoga un papel importante un novo concepto de *continuidade* para relacións.

Sobre o fluxo anterior en $\mathcal{M}_*$, tan só se indicará a existencia dunha medida de probabilidade invariante natural, cuio estudo sería importante. Extende unha medida estudada no caso de grafos, que levou a definición do "random graph"