

XOSÉ M. MASA VÁZQUEZ

Topoloxía Xeral

Introducción aos espazos
euclidianos, métricos
e topolóxicos



M A N U A I S
UNIVERSITARIOS



UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

publicacións

Topoloxía Xeral

Introducción aos espazos
euclidianos, métricos e topolóxicos

Manuais Universitarios
núm. 1

Xosé M. Masa Vázquez

Topoloxía Xeral

Introducción aos espazos
euclidianos, métricos e topolóxicos

1999

Universidade de Santiago de Compostela

MASA VÁZQUEZ, Xosé M.

Topoloxía xeral : Introducción aos espacios euclidianos, métricos e topolóxicos. – Santiago de Compostela : Universidade, Servicio de Publicacións e Intercambio Científico, 1999. – X, 269 p. ; 24 cm. – (Manuais Universitarios ; 1). – Bibliogr.: 259-260. – Índices. – D.L. C-685 / 1999. – ISBN 84-8121-753-0.

1. Topoloxía I. Universidade de Santiago de Compostela. Servicio de Publicacións e Intercambio Científico, ed. II Serie

515.12

©Universidade de Santiago de Compostela, 1999

Deseño de cuberta: Alejandro Vidal

Edita

Servicio de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela
Campus universitario sur

Imprime

Imprenta Universitaria
Campus universitario sur

ISBN 84-8121-753-0

Dep. Legal: C-685/99

Limiar

O libro que tes nas mans principiou co propósito de ser un manual universitario. Como tal foise encarnando ao redor das notas de clase que sobre a materia impartiu o autor nos últimos tres ou catro anos. Pretende abranguer o que puidera aceptarse como *curriculum* básico en topoloxía xeral nunha licenciatura de matemáticas, cubrindo as necesidades da Análise Matemática e da Xeometría. Como esforzo obxectivizador en tal sentido, o seu contido aproxímase aos estudos obrigatorios de topoloxía na licenciatura de matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela.

Trátase, pois, dun libro de texto, un libro que quer ser didáctico e elemental. Pero, ao tempo, pretende ofrecer respostas ou orientacións a moi diversas cuestións que, motivadas pola propia lectura do texto ou por outros estudos de licenciatura, os seus e as súas lectoras se puideran facer. Quere ser, ao seu nivel, unha obra de referencia sobre topoloxía conxuntista.

A vontade de se manter a un nivel elemental obriga a prescindir dalgúns conceptos, técnicas e resultados. Non se trata, en particular, a topoloxía de produtos dunha infinidade de espazos, cuestión alonxada da intuición do produto finito e que agocha profundas implicacións lóxicas. Aínda que, coa linguaxe apropiada, estúdiase algún dos principais exemplos de produto enumerábel.

Na dirección contraria, o afán de servir de obra de referencia levou a incluír máis materia da que razoablemente se poida cursar nunha licenciatura, obrigando en cada caso a certas escollas, en función da orientación desexada, máis xeométrica ou máis analítica, ou dos gostos ou preferencias de cada quen.

O libro comeza cun capítulo de preliminares de contido e intención diversos. Así, mentres as seccións relativas a conxuntos e funcións non pasan de ser un glosario de propiedades e notacións empregadas, para referencia interna, o tratamento dado á cuestión de numerabilidade pretende servir de introducción ao tema. Xeometría analítica elemental, álgebra linear e cálculo nunha variábel son outros prerequisites.

A pesar de que tal escolla conleva certa reiteración expositiva, a primeira parte está adicada á topoloxía dos espazos euclidianos. Ademais de constituír unha ferramenta imprescindible para calquera curso de Análise, é a forma máis concreta e intuitiva de abordar o estudio da topoloxía conxuntista, unha das partes máis formais e abstractas da matemática, que, por tal motivo, resulta

con frecuencia árida. No tratamento dado, faise uso preferente do concepto de punto de acumulación e da converxencia de sucesións.

Na segunda parte invértese parcialmente o método, e espazos métricos e espazos topolóxicos abstractos estúdanse á par, co conseguinte aforro de tempo, abordando con amplitude as peculiaridades daqueles. En todos os casos, sexan espazos euclidianos ou métricos, óptase pola linguaxe e o tratamento máis universal, preferindo, como norma, os métodos topolóxicos aos estritamente métricos.

Inclúese, ao final, un apéndice no que se fai a construción do corpo \mathbb{R} dos números reais, seguindo o método de Cantor. Xa que boa parte dos contidos deste libro e de toda a matemática baséanse na existencia e propiedades deste obxecto e que a súa construción non adoita encontrar espazo nos programas de licenciatura, ofrécese aquí, sen demorar moito nos detalles.

Dous criterios influíron especialmente na selección dos temas expostos e na súa extensión. Dunha parte, a vontade de incluír resultados significativos, respostas interesantes ás cuestións suscitadas, mesmo se rebordan o nivel elemental do manual. Así, estúdiase un resultado profundo de extensión de aplicacións, inclúese un teorema moi xeral de metrizableidade, caracterízase a compacidade en espazos de funcións, constrúese un mergullo dunha variedade compacta nun espazo euclidiano, ... Doutra parte, procurouse un tratamento extenso dos exemplos de principal interese matemático, sexan superficies, presentadas como espazos cociente de rexións planas, sexan o espazo de Banach de funcións reais limitadas ou o espazo de Hilbert, como exemplos máis salientábeis de espazos métricos diferentes dos euclidianos.

Ao longo do libro búscase conciliar concisión, seleccionando os enunciados fundamentais e fuxindo de interminábeis explicacións demostrativas, e ilustración da orixe e do porqué dos principais conceptos e resultados. Procúrase, asemade, espertar o interese do lector, comentando resultados máis complexos e abrindo perspectivas de continuación. E adícase unha boa parte do espazo, consonte o criterio pedagóxico do autor, á descripción dun grande número de exemplos, ate o punto de que ben se podería presentar como un libro de exercicios resoltos.

Non poden rematar estas verbas iniciais sen facer referencia aos tres factores que propiciaron a elaboración deste libro. O primeiro, a motivación imprescindible, a estimulante comunicación con tantos e tantas estudantes que, coa súa acollida e atención, transmutaban esforzo en maxisterio. Outra causa, ben máis prosaica, foi a chegada ao despacho do autor dos medios informáticos, que permitiron ir acumulando e ordenando o material docente xerado na actividade cotián. A terceira remite ao ámbito familiar, as moitas horas de traballo necesariamente de baixa intensidade, obrigado por cueiros e biberóns, que terán deixado algún selo inapreciábel por entre os formalismos destas páxinas.

Cada relectura do texto levou a cambios, non sempre menores, e corrección de erros e erratas. Ponse punto aquí, non fora que este proceso de revisión diverxa.

Compostela, Xuño de 1999

Índice Xeral

Limiar	v
1 Preliminares	1
1.1 Conxuntos	1
Familias de conxuntos	4
Producto cartesiano de conxuntos	6
1.2 Funcións	6
1.3 Relacións de equivalencia	10
Conxunto cociente	12
Factorización dunha aplicación	13
1.4 Conxuntos enumerábeis	14
O cardinal de \mathbb{R}	21
1.5 Potencia cartesiana infinita	21
Exercicios	23
2 Os espazos euclidianos	25
2.1 Norma euclidiana e distancia	25
2.2 Bolas e relacións métricas	31
2.3 Conxuntos abertos e pechados	33
Espacios e subespacios	34
Exercicios	40
3 Convergencia	41
3.1 Sucesións	41
3.2 Convergencia e topoloxía	43
3.3 Sucesións de Cauchy	45
3.4 A completitude de \mathbb{R} e de \mathbb{R}^p	47
Teorema de Bolzano-Weierstrass	50
Exercicios	52
4 Continuidade	53
4.1 Funcións continuas	53
Continuidade uniforme	56
4.2 Continuidade secuencial	60

4.3	Restricción e extensión de funcións	64
	Conxuntos densos	67
4.4	Homeomorfismos	69
	Exercicios	71
5	Compacidade e conexidade	73
5.1	Condición de Borel-Lebesgue. Teorema de Heine-Borel	73
5.2	Outras caracterizacións da compacidade	76
5.3	Compacidade e continuidade	78
	Continuidade uniforme	79
5.4	Conexidade	80
5.5	Conxuntos compactos e conexos	85
	Exercicios	86
6	Espacios métricos	87
6.1	Métrica nun conxunto	87
	Espacios vectoriais normados	90
	Bolas e relacións métricas	94
6.2	Isometrías	98
6.3	Isometrías do espacio euclidiano	101
	Exercicios	103
7	Espacios topolóxicos	105
7.1	Topoloxía	105
	Topoloxía relativa: subespacios	108
7.2	Base dunha topoloxía	108
7.3	Veciñanzas e base local	112
7.4	Conxuntos nun espacio	114
7.5	Comparación de topoloxías	119
	Métricas topoloxicamente equivalentes	120
	Exercicios	122
8	Metrizabilidade e numerabilidade	125
8.1	Metrizabilidade e axioma de separación de Hausdorff	125
8.2	Primeiro enumerabilidade e converxencia	126
8.3	Segundo enumerabilidade e espazos separábeis	130
	Exercicios	136
9	Funcións continuas	137
9.1	Funcións continuas	137
	Continuidade secuencial	142
9.2	Continuidade en espazos métricos	143
	A continuidade das aplicacións lineares	145
9.3	Homeomorfismos e propiedades topolóxicas	147
	Exercicios	153

10	Espacios suma, producto e cociente	155
10.1	Topoloxías inducidas	155
10.2	Suma topolóxica	157
10.3	Producto topolóxico	159
10.4	Espacios cociente	164
10.5	Superficies	169
	Orientabilidade	176
	Exercicios	178
11	Compacidade	181
11.1	Espacios compactos	181
11.2	Espacios compactos Hausdorff	184
11.3	Compacidade e produtos	186
11.4	A propiedade de intersección finita	187
11.5	Compacidade local e compactificación	190
	Compactificación de Aleksandroff	192
	Exercicios	193
12	Conexidade	195
12.1	Conexidade e compoñentes conexas	195
12.2	Conexidade por camiños	200
12.3	Conexidade local	204
	Exercicios	207
13	Compleción	209
13.1	Espacios métricos completos	209
13.2	O espacio de Banach $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$	212
13.3	O espacio de Hilbert ℓ^2	215
13.4	Teorema do punto fixo de Banach	218
13.5	Teorema de Baire	219
13.6	Completamento dun espacio métrico	223
	Exercicios	227
14	Compacidade en espacios métricos	229
14.1	Espacios totalmente limitados	229
14.2	Espacios métricos compactos	231
	O cubo de Hilbert	232
14.3	Equicontinuidade	235
	Exercicios	236
15	Espacios normais	237
15.1	O problema de extensión. Retractos	237
15.2	Espacios normais	239
15.3	Lema de Urysohn	242
15.4	Teorema de extensión de Tietze	245
15.5	Teorema de metrizabilidade de Urysohn	248

15.6 Variedades e particións da unidade	250
Exercicios	254
Apéndice:	
A construción de \mathbb{R}	255
Bibliografía	259
Índice de notacións	261
Índice alfabético	264



Este manual abrangue os coñecementos fundamentais da topoloxía conxuntista elemental, cubrindo as necesidades da análise matemática, da xeometría e da topoloxía alxébrica. A selección dos temas expostos e a súa extensión responden á vontade de chegar resultados significativos, respostas interesantes ás cuestións suscitadas, mesmo se rebordan o nivel elemental do manual, o que converte este libro ademais nunha obra de referencia e consulta. Deste xeito, estúdase un resultado profundo de extensión de aplicacións, inclúese un teorema moi xeral de metrizableidade, constrúese un mergullo dunha variedade compacta nun espazo euclidiano... Na concepción do manual foi tamén determinante o afán de adicar preferente atención aos obxectos de principal interese matemático, sexan espazos euclidianos, aos que se dá un tratamento independente, sexan superficies, presentadas como espazos cociente de rexións planas, sexan o espazo de Banach de funcións reais limitadas ou o espazo de Hilbert de sucesións de cadrado sumábel, como exemplos máis salientábeis de espazos métricos diferentes dos euclidianos. O texto complementase cunha ampla colección de exemplos e exercicios detalladamente resoltos.

MANUAIS
UNIVERSITARIOS

