Curvatura media y parabolicidad en espaciotiempos de Robertson-Walker generalizados

Rafael M. Rubio
Departamento de Matemáticas
Universidad de Córdoba

Introducción

El interés por el estudio de hipersuperficies espaciales de curvatura media constante en ambientes Lorenzianos, ha sido puesto de manifiesto por numerosos autores como muestra el artículo panorámico de Brasil-Colares [**1**]. Esto se justifica tanto por su interés matemático, como también físico en el estudio de la Relatividad General [**10**].

Comencemos recordando que los autores Yeng-Yau [**6**], caracterizaron los hyperplanos espaciales de $\mathbb{L}^{n+1}$ como las únicas hipersuperficies espaciales completas con curvatura media identicamente nula, poniendo de manifiesto en este mismo trabajo que todo grafo espacial y entero de curvatura media constante es necesariamente completo. En consecuencia, la versión no paramétrica del resultado de Cheng-Yau, expresada en terminos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, afirma que las únicas soluciones enteras a la ecuación diferencial de las hipersuperficies maximales de $\mathbb{L}^{n+1}$

$$\operatorname{div}\Big(\frac{Du}{\sqrt{1- \mid Du \mid^2}}\Big) = 0 \quad \mid Du \mid < 1, \tag{1}$$

son las funciones afines.

Con ayuda de este resultado y utilizando como principal herramienta, el principio generalizado del máximo de Omori-Yau, los autores Aledo-Alías probaron que las únicas hipersuperficies espaciales de curvatura media constante en $\mathbb{L}^{n+1}$ que están comprendidas entre dos planos paralelos son a su vez los planos paralelos a los dados. Conviene observar que este resultado es equivalente a probar que las únicas hipersuperficies espaciales de curvatura constante en $\mathbb{L}^{n+1}$ comprendidas entre dos planos ortogonales al eje temporal coordenado, son necesariamente otro plano de este tipo. De nuevo el caso no paramétrico en términos de ecuaciones diferenciales afirma que las únicas soluciones acotadas a la ecuación diferencial de hipersuperfices espaciales de curvatura media constante

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1-\mid Du\mid^2}}\right) = nH \quad \mid Du \mid < 1, \tag{2}$$

son funciones constantes.
En realidad sería más preciso decir que la anterior ecuación no tiene soluciones acotadas para $H \neq 0$ y que las únicas soluciones acotadas para $H = 0$ son las constantes.

En ambientes mucho más generales son numerosos los trabajos que se pueden encontrar donde se estudian las hipersuperficies espaciales de curvatura media constante. Destacaremos especialmente varios, en los que se obtienen resultados para hipersuperficies espaciales de curvatura media constante, en espaciotiempos de Robertson-Walker generalizados (GRW) y otros espacios con ciertas simetrías [**2**], [**3**], [**4**] y [**9**].

En las tres primeras referencias, se supone que el espaciotiempo ambiente, admite una hipersuperficie espacial compacta de curvatura media constante, lo que conlleva que dicho espaciotiempo sea cerrado. Por otra parte, si la fibra ambiente es compacta, se puede concluir bajo alguna hipótesis adicional que toda hipersuperficie espacial completa será compacta, haciendo posible el uso de técnicas integrales.
Recordemos que un espaciotiempo se dice que satisface la condición de convergencia temporal si la forma cuadrática de Ricci sobre los vectores temporales es no negativa, además esto equivale en el caso de un GRW a

$$f'' \leq 0 \quad \text{y} \quad Ric \geq (n-1)(ff'' - f'^2)g,$$

donde Ric denota el tensor de Ricci de la fibra.

Así, los autores de los tres primeros trabajos, consiguen caracterizar los slices espaciales del ambiente, como las únicas hipersuperficies espaciales con curvatura media constante en espaciotiempos de Robertson-Walker generalizados cerrados, que satisfacen la condición de convergencia temporal (TCC) estrictamente en su segunda condición.

Nuevamente, en terminos de ecuaciones difrenciales el punto de vista no paramétrico de este resultado se expresa diciendo:

Sea (F,g) una variedad riemanniana compacta y $f:F\longrightarrow(0,\infty)$ una función diferenciable tal que

$$f''\leq 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{Ric}>(n-1)(ff''-f'^2)g$$

sobre F. Si $H\in\mathbb{R}$, las únicas soluciones $u:F\longrightarrow I$ a la ecuación diferencial de curvatura media constante

$$\operatorname{div}\Big(\frac{Du}{f(u)\sqrt{f(u)^2-\mid Du\mid^2}}\Big)=nH-\frac{f'(u)}{\sqrt{f(u)^2-\mid Du\mid^2}}\Big(2+\frac{\mid Du\mid^2}{f(u)^2}\Big) \qquad \text{(E,1)}$$

$$\mid Du\mid< f(u) \qquad \text{(E,2)}$$

vienen dadas por las funciones constantes.

Por el contrario, en la última, no se supone compacidad, ni en la fibra, ni en la hipersuperficie, aunque se exige la existencia de un máximo local para cierta función distinguida, definida sobre la hipersuperficie espacial. Los autores, consiguen demostrar bajo cierta hipótesis natural en la fibra, que localmente en torno del punto donde se alcanza el máximo, la hipersuperficie estará contenida en un slice. Destacaremos en este trabajo, la utilización de la técnica de Bochner-Lichnerowicz, novedosa en ambientes Lorentzianos.

Centrando el caso

En lo que sigue describiremos algunos resultados obtenidos por Caballero-Romero-Rubio [**9**] en el estudio de superficies espaciales no compactas de curvatura media conveniente acotada, o constante en espaciotiempos de Robertson-Walker generalizados de dimensión 3. Dichos resultados engloban y extienden a otros anteriores, obtenidos por Romero-Rubio en el caso de espaciotiempos de Robertson-Walker de fibra $\mathbb{R}^2$ y tales que su curvatura seccional en cada abierto es no nula. Nos referiremos a la verificación de esta última condición, la cual equivale a que la función warping nunca sea localmente constante, nombrando al espaciotiempo como propio. Para probar los citados resultados, el espacio ambiente deberá satisfacer algunas condiciones geométricas usuales, cuyo origen proviene de la Teoría de la Relatividad.

Así, se exigirá al espaciotiempo la satisfación de la condición de convergencia nula (NCC), la cual consiste en suponer que la forma cuadrática de Ricci sobre los vectores isótropos sea no negativa, o en su caso la exigencia de TCC.

En este mismo contexto Caballero-Romero-Rubio [**5**] han caracterizado los grafos enteros y maximales en los espaciotiempos mencionados, resolviendo de esta forma un nuevo problema de tipo Calabi-Bernstein.

Preliminares

Introduzcamos algunas definiciones y notación que nos permitan concretar los resultados:

Sea f una función positiva y diferenciable de clase C^∞, definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Consideremos el espaciotiempo de Robertson-Walker generalizado M con base $(I, -dt^2)$, fibra una variedad riemanniana 2-dimensional (F, g_0) y función warping f, esto es el producto $I \times F$, con la métrica dada por

$$\langle\ ,\ \rangle = -\pi_I^*(dt^2) + f(\pi_I)^2 \pi_F^*(g_0), \tag{3}$$

donde π_I y π_F denotan las proyecciones sobre I y F, respectivamente. Si la función f es no localmente constante, estaremos en el caso de un espaciotiempo propio de Robertson-Walker generalizado.

Si denotamos por $x : S \to M$ la inmersion de una superficie espacial, la cual orientamos de forma que su normal N verifique $\langle \partial_t, N \rangle > 0$, definimos las funciones $t := \pi_I \circ x$, $f(t) := f \circ t$ y el campo $\xi = f(\pi_I)\partial_t$. El campo ξ es conforme y cerrado.

Un cálculo estandar permite escribir las expresiones

$$\Delta t = -\frac{f'(t)}{f(t)}\left\{2 + \mid \nabla t \mid^2 \right\} - 2H\langle N, \partial_t \rangle$$

y

$$\Delta f(t) = -2\frac{f'(t)^2}{f(t)} + f(t)(\log f)''(t) \mid \nabla t \mid^2 - 2f'(t)H\langle N, \partial_t \rangle$$

También teniendo en cuenta la ecuación de Gauss de la superficie y la expresión del tensor de Ricci de M se puede escribir la curvatura Gaussiana de la misma

$$K = \frac{f'(t)^2}{f(t)^2} + \left\{ \frac{K^F(\pi_F)}{f(t)^2} - (\log f)''(t) \right\} \mid \nabla t \mid^2 + \frac{K^F(\pi_F)}{f(t)^2} - 2H^2 + \frac{1}{2}\mathrm{trace}(A^2) \quad (4)$$

donde K^F denota la curvatura gaussiana de la fibra. Por otra parte, observaremos que en los espacios ambiente que estamos tratando, la condición NCC es equivale a que

$$\frac{K^F(\pi_F)}{f(t)^2} - (\log f)'' \geq 0$$

y la condicón TCC es equivalente a que se satisfaga NCC y que $f'' \leq 0$.

De esta forma, si M satisface NCC y

$$K^F(\pi_F) + f'^2(t) \geq H^2 f^2(t),$$

entonces $K \geq 0$. En particular si la curvatura de la fibra $K_F \geq 0$ y la curvatura media verifica que $H^2 \leq \frac{f'^2(t)}{f^2(t)}$ se obtiene que $K \geq 0$.

Principales resultados

La linea de razonamiento para la obtención de los principales resultados que se expondrán a continuación, vendrá dada por una parte, por la elección de una función distinguida sobre la superficie en estudio, la cual será constante si y sólo si dicha superficie es totalmente umbilical. Por otro lado, se determinarán acotaciones de la curvatura media de la superficie que harán que esta sea parabólica, con lo que mediante el uso de algún resultado técnico, bastará asegurar que la función elegida sea subarmonónica para poder concluir que es constante.

GRW propios

Teorema 1. Sea M un espaciotiempo de Robertson-Walker generalizado propio, cuya fibra F tiene curvatura gaussiana $K_F \geq 0$ y el cual satisface TCC. Entonces, las únicas superficies espaciales completas cuya función curvatura media H cumple

$$H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2} \tag{5}$$

sobre toda la superficie, son las slices espaciales.

Demostración

Una reagrupación adecuada de los términos en la fórmula del laplaciano de la función warping sobre la superficie, permite escribir

$$\frac{1}{f(t)}\Delta f(t) = -\Big(\frac{f'(t)}{f(t)} + H\langle N, \partial_t\rangle\Big)^2 + \Big(H^2 - \frac{f'(t)^2}{f(t)^2}\Big)\langle N, \partial_t\rangle^2 + \frac{f''(t)}{f(t)} \mid \nabla t \mid^2 \leq 0.$$

De esta forma, la función $f(t)$ es una función subarmónica y positiva sobre una superficie que al ser completa y tener curvatura $K \geq 0$, haciendo uso de un resultado clásico de Blanc-Fiala-Hubber [**7**] podemos concluir que es parabólica y en consecuencia la función $f(t)$ debe ser constante y la superficie será necesariamente un slice spacial.

$\square$

Obsérvese, que la condicíon (5), puede ser interpretada diciendo que el cuadrado de la curvatura media de la superficies en cada punto es menor o igual que el cuadrado de la curvatura media de la slice espacial que pasa por dicho punto.

Caso general

Supongamos ahora que la superficie S tiene curvatura media constante y que está comprendida entre dos slices.
Sean $s_0 = \text{ínf}(t(S))$ y $s^0 = \sup(t(S))$. Definamos la función

$$\mathcal{F}(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{s_0}^{y} f(s)ds & \text{if } H \geq 0 \\ \\ \displaystyle\int_{s^0}^{y} f(s)ds & \text{if } H \leq 0 \end{cases}$$

y consideremos la función no negativa $w = \langle N, \xi \rangle + H\mathcal{F}(t)$ sobre S, donde $\mathcal{F}(t) := \mathcal{F} \circ t$.

Es fácil comprobar que

$$\nabla\langle N,\xi\rangle = -A\xi^{\top}$$

siendo $\xi^{\top} := \xi + \langle N,\xi\rangle N$ la parte tangente a S del campo conforme ξ. También se puede comprobar que

$$|\nabla w|^2 = \left(\frac{1}{2}\mathrm{trace}(A^2) - H^2\right)\{\langle N,\xi\rangle^2 - f(t)^2\}. \tag{6}$$

Siendo claro que w es constante si y sólo si la superficie es totalmente umbilical.

Por otra parte, cálculos estandar usando la ecuación de Codazzi, permiten obtener la expresión

$$\Delta w = \left\{\frac{K^F(\pi_F)}{f(t)^2} - (\log f)''(t)\right\} |\nabla t|^2 \langle N,\xi\rangle + \{\mathrm{trace}(A^2) - 2H^2\}\langle N,\xi\rangle. \tag{7}$$

Si suponemos que el ambiente M satisface NCC, entonces $\Delta w \geq 0$. Teniendo en cuenta la fórmulade la curvatura, tenemos

$$\Delta w = \left\{ K - \frac{f'(t)^2}{f(t)^2} - \frac{K^F(\pi_F)}{f(t)^2} + \frac{1}{2}\mathrm{trace}(A^2) \right\} \langle N, \xi \rangle. \qquad (8)$$

Usando como principal herramienta un lema técnico debido a Romero-Rubio [**12**], podemos enunciar el siguiente resultado, el cual da una acotación de la integral del cuadrado de la longitud del gradiente de la función w en un disco geodésico, en relación con la medida armónica de un anillo geodésico concétrico al disco.

Teorema. Sea M un espaciotiempo de Robertson-Walker generalizado, cuya fibra es una superficie riemanniana y el cual satisface NCC. Sea S una superficie espacial de M, con curvatura media constante H, la cual está comprendida entre dos slices espaciales. Si D_R denota el disco geodésico de radio R y centro un punto $p \in S$, entonces para cada r tal que $0 < r < R$ la función w satisface

$$\int_{D_r} |\nabla w|^2 \, dV \leq \frac{C}{\mu_{r,R}},$$

donde D_r denota el disco geodésico de radio r y centro p en S, $\frac{1}{\mu_{r,R}}$ es la capacidad del anillo $A_{r,R} := D_R - \bar{D}_r$ y $C = C(p, R) > 0$ es una constante.

Como consecuencia al añadir alguna hipótesis adicional, podemos enunciar el siguiente

Corolario. Sea M un espaciotiempo de Robertson-Walker generalizado, cuya fibra es una superficie riemanniana con curvatura K_F y el cual satisface NCC. Si una superficie espacial completa y no compacta de curvatura media constante S de M está comprendida entre dos slices spaciales y su curvatura media verifica

$$H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2} + \frac{K^F(\pi_F)}{f(t)^2}, \tag{9}$$

entonces S es totalmente umbilical.

Demostración

La acotación impuesta sobre H^2, garantiza que la curvatura gaussiana de la superficie es no negativa. Usando un resultado clásico debido a Blanc-Fiala-Hubber [**7**], tendremos que S es parabólica.

Por otra parte, al ser S parabólica se verifica que

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\mu_{r,R}} = 0,$$

basta ahora aplicar el teorema previo.

Cuando la función warping del ambiente cumple que

$$(\log f)'' \leq 0$$

Romero-Rubio [**11**] han probado que para toda superficie completa comprendida entre dos slices se verifica que

$$H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2},$$

además es claro que si se da la condición $(\log f)'' \leq 0$ y la curvatura de la fibra $K_F \geq 0$, el ambiente también satisface NCC y por tanto S debe ser totalmente umbilical.

Por otra parte, bajo las hipótesis del corolario previo, si la NCC es estricta en algún punto $p \in S$, entonces desde la expresión del laplaciano de w, se deduce la existencia de un entorno abierto $\Omega \subset S$ de p, de tal forma que Ω está incluido en el slice $\{t = t(p)\}$. En consecuencia si NCC se verifica de forma estricta la superficie S debe ser un slice espacial.

Como consecuencia, conviene señalar que en las hipótesis del corolario obtendremos que la función

$$\langle N, \xi \rangle = c - H\mathcal{F}(t),$$

para algún $c \in \mathbb{R}^+$, entonces las funciones $\langle N, \partial_t \rangle$ y $f(t)$ están ambas acotadas sobre S.

Caso no paramétrico

Consideremos (F, g) una superficie riemanniana completa y no compacta y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y positiva. Para cada $u \in C^\infty(F)$ tal que $u(F) \subset I$, podemos considerar su grafo $\Sigma_u = \{(u(p), p) \ : \ p \in F\}$ en el espaciotiempo GRW $M = I \times_f F$. El grafo de u, hereda una métrica, representada sobre F como $g_u := -du^2 + f(u)^2 g$ la cual es espacial si y sólo si u cumple que $g(Du, Du) < f(u)^2$ sobre F, donde Du denota el gradiente de u en (F, g). Obsérvese que $t(u(p), p) = u(p)$ para todo $p \in F$ y por lo tanto sobre Σ_u t y u pueden identificarse de forma natural.

Aplicaremos ahora los resultados obtenidos en el caso paramétrico, al estudio de las soluciones enteras acotadas de la ecuación

$$\mathrm{div}\left(\frac{Du}{f(u)\sqrt{f(u)^2- \mid Du \mid^2}}\right) = 2H - \frac{f'(u)}{\sqrt{f(u)^2- \mid Du \mid^2}}\left(2 + \frac{\mid Du \mid^2}{f(u)^2}\right) \qquad \text{(E,1)}$$

$$\mid Du \mid < \lambda f(u), \quad 0 < \lambda < 1, \qquad \text{(E,2)}$$

Si u es una solución de la ecuación dada, su grafo es una superficie espacial de curvatura media constante en el espaciotiempo GRW $I \times_f F$ que claramente está comprendida entre dos slices. Sea N el vector normal al grafo tal que $\langle N, \partial_t \rangle > 0$, es fácil comprobar que la restricción (E.2) puede expresarse como

$$\langle N, \partial_t \rangle < \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

Hemos visto que anteriormente que en el caso de superficies espaciales completas comprendidas entre dos slices, la función $\langle N, \partial_t \rangle$ es acotada, con lo que la restricción (E.2) es natural.

Si denotamos por $\mathcal{L}(\alpha)$ y $\mathcal{L}_u(\alpha)$ las longitudes de una curva diferenciable α respecto de las métricas g y g_u respectivamente, se puede comprobar que

$$\mathcal{L}_u(\alpha) \geq \sqrt{1-\lambda^2}\, \text{ínf}(f(u))\mathcal{L}(\alpha).$$

En consecuencia, al ser (F, g) completa e $\text{ínf}(f(u)) > 0$, entonces la métrica g_u es completa. Ahora desde el caso paramétrico podemos enunciar el siguiente resultado.

Escribamos $\mathbf{B}_f = \{-f'(t)/f(t) \ : \ t \in I\} \subset \mathbb{R}$.

Teorema. Sea (F, g) una surperficie riemanniana completa y no compacta con curvatura de Gauss K^F y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función diferenciable. Supongamos que

i) $K^F > 0$ y $(\log f)'' \leq 0$, o bien

ii) $K^F \geq 0$ y $(\log f)'' < 0$, o bien

iii) $K^F \geq 0$, f no es localmente constante y $f'' \leq 0$.

Entonces,

(a) Si $H \notin \mathbf{B}_f$ entonces no existe ninguna solución entera y acotada a la ecuación diferencial (E) de superficies espaciales con curvatura media constante H en $M = I \times_f F$.

(b) Si $H \in \mathbf{B}_f$ entonces $u = t_0$, donde $H = -\frac{f'(t_0)}{f(t_0)}$, es la única solución entera y acotada a la ecuación diferencial (E) de superficies espaciales con curvatura media constante H en $M = I \times_f F$.

Referencias:

[1] Aldir Brasil Jr. and Gervasio Colares, *On constant mean curvature spacelike hypersurfaces in Lorentz manifolds*, Matematica Comtemporanea **17** (1999), 99–136.

[2] L.J. Alías, A. Romero and M. Sánchez, *Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Generalized Robertson-Walker spacetimes*, Gen. Relativity Gravitation, **27** (1995), 71–84.

[3] L.J. Alías, A. Romero and M. Sánchez, *Spacelike hypersurfaces of constant mean curvature and Calabi-Bernstein type problems*, Tôhoku Math. J., **49** (1997), 337–345.

[4] L.J. Alías, A. Romero and M. Sánchez, *Spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in certain spacetimes*, Nonlinear

Analysis TMA, **30** (1997), 655–661.

[5] M. Caballero, A. Romero and R.M. Rubio, Uniqueness of maximal surfaces in Generalized Robertson-Walker spacetimes and Calabi-Bernstein type problems, Journal of Geometry and Physics (to appear)

[6] S. Y. Cheng and S. T. Yau, Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces, *Ann. of Math.* **104** (1976), 407–419.

[7] J.L. Kazdan, *Parabolicity and the Liouville property on complete Riemannian manifolds*, Aspects of Math. **E10**, Ed. A.J. Tromba, Friedr. Vieweg and Sohn, Bonn (1987), 153–166.

[8] J.M. Latorre and A. Romero, *New examples of Calabi-Bernstein problems for some nonlinear equations*, Diff. Geom. Appl. **15** (2001), 153–163.

[9] J.M. Latorre and A. Romero, *Uniqueness of noncompact spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Generalized Robertson-Walker spacetimes*, Geom. Dedicata, **93** (2002), 1–10.

[10] Marsden, J. E. and Tipler, *Maximal hypersurfaces and foliations of constant mean curvature in General Relativity*, Phys. Rep. **66** (1980), 109–139.

[11] A. Romero and R. M. Rubio, On the mean curvature of spacelike surfaces in certain 3-dimensional Robertson-Walker spacetimes and Calabi-Bernstein's type problems, Ann. Glob. Anal. Geom DOI 10.1007/s10455-009-9171-y

[12] A. Romero and R. M. Rubio, On maximal surfaces in certain non- at 3-dimensional Robertson-Walker spacetimes, Preprint 2009 DOI