Fundamentos de Geometría de Finsler y conexiones con la Geometría de Espaciotiempos Estacionarios

Miguel Sánchez

Universidad de Granada

(conjunto con **MA Javaloyes, JL Flores**)

Cedeira, 2009.

Objetivos globales

Geometría de Finsler: variedad con una norma (de Minkowski) puesta diferenciablemente en cada espacio tangente.

- Idea atractiva ya considerada por el propio Riemann aunque...
- Berger en su "Panorama de la Geometría Riemanniana" no le da mucha importancia

  Según MathSciNet: (Finsler + Spain) dondequiera $\Rightarrow$ 8 artículos
- Reciente impulso: clasificación (correcta) de las variedades de curvatura bandera constante, libros como el de Bao, Chern y Shen... y relación con la Geometría Lorentziana

- ¿Qué son las métricas de Finsler?
  - Normas de Minkowski
  - Variedades de Finsler
- Interés para espaciotiempos estacionarios
- La curvatura bandera (MA Javaloyes)
- El borde de Cauchy y Busemann (JL Flores).

Mi charla

- Parte I: Normas usuales y de Minkowski.
- Parte II: Generalidades sobre variedades de Finsler.
- Parte III: Relación con e.t. estacionarios.

PARTE I: NORMAS USUALES Y DE MINKOWSKI

1.- Normas en e.v. dimensión finita

Definición 0.1 *Norma* $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$

- $\| v \| \geq 0$ *con igualdad* $\Leftrightarrow v = 0$ *(positividad)*
- $\| \alpha v \| = |\alpha| \, \| v \|$ *(homogeneidad)*

  Si sólo para $\alpha \geq 0$ *"no (necesariamente) reversible" (homog. posit.)*
- $\| v + w \| \leq \| v \| + \| w \|$ *(des. triangular)*

Observaciones

- En general, si se cumple la igualdad en la desigualdad triangular NO tiene por qué ocurrir que sean v, w colineales (como en el caso de normas que proviene de un prod. esc.)
- En general, las normas son continuas (para la topología natural de V) pero no son diferenciables ni en 0 ni tal vez en otros puntos.
- La norma determina una distancia $d(x,y) = \| v - w \|$, que es no simétrica si $\|\cdot\|$ es no reversible.

2.- Perspectiva desde la bola y esfera unidad

$B = \{v \in V : \| v \| \leq 1\}$ (cerrada), $S = \partial B$.

Teorema 0.2 *(1) Para cualquier norma, B verifica:*

1. *convexa*
2. *compacta*
3. 0 *es un punto interior*
4. B *es simétrica respecto al origen (dispensable para el caso no reversible).*

(2) Recíprocamente, si un subconjunto $B \subset V$ satisface las condiciones anteriores, entonces es la bola unidad de una norma (reversible o no, según se imponga la última) definida como:

$$\| v \|_B := \mathrm{Inf}\{\xi \in \mathbb{R}^+ : \frac{v}{\xi} \in B\}$$

Observación 1. Desde esta perspectiva, requisitos adicionales para una norma:

1. Diferenciabilidad (fuera de 0) de $\|\cdot\|$: S es diferenciable

2. Convexidad estricta: B es estrictamente convexa

3. Convexidad fuerte: S (es diferenc. y) con segunda forma fundamental σ definida positiva.

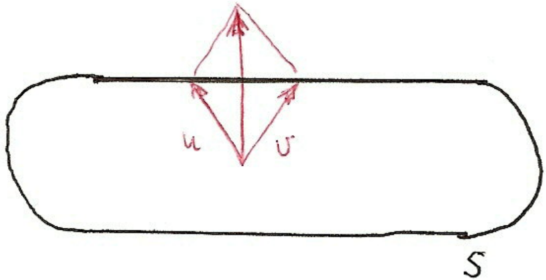
   Seg. forma fund. $\sigma_p, p \in V$: para la conexión afín de V y cualquier dirección transversa interior (por ejemplo, $-p$)

   [Si se prefiere, puede tomarse un prod. escalar auxiliar].

   $\rightsquigarrow$ Condición más fuerte, se exigirá en Geom. Finsler.

(Y parece natural considerar también normas no reversibles.)

$\|u+v\| = 2\|(u+v)/2\| = 2 = \|u\| + \|v\|$



S no estrictamente convexa $\Rightarrow$

Desigualdad triangular no estricta

Observación 2. Elementos recuperables de los prod. escalares bajo convexidad fuerte (basta diferenciabilidad y convexidad estricta):

1. La desigualdad triangular es "estricta": igualdad en $\Leftrightarrow$ v, w dependientes y no apuntan en sentidos contrarios.

2. Cada $v \in S$ determina un único plano H por v que es "ortogonal" a v (por diferenciabilidad):

   $H = T_v S$. $\rightsquigarrow$ forma lineal asociada.

   [Plano vectorial P ortogonal a $v \in V$: $d(v, P) = \| v \|$]

   Además, $v \neq w \Rightarrow T_v S \neq T_w S$ (por conv. estricta)

3. Otros elementos: elemento de volumen (asociado a cualquier norma y una orientación), ortogonalidad entre vectores (relación binaria no necesariamente simétrica), bases ortonormales.

3.- Normas de Minkowski

Definición 0.3 *Norma de Minkowski sobre $\mathbb{R}^n$:* *aplicación $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que verifica:*

1. $F \geq 0$ *(no negat)*
2. F *es* C^∞ *sobre* $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *(suavidad)*
3. $F(\lambda y) = \lambda F(y)$, $\forall \lambda > 0$ *(homogeneidad positiva)*
4. *La matriz hessiana* $g_{ij} = (1/2)(F^2_{y^i y^j})(y)$ *es definida positiva* $\forall y \neq 0$ *"métrica fundamental"* [y^i coordenadas usuales para $y \in R^n$] (convexidad fuerte)

Como Hess sólo depende de la conexión afín, la definición se extiende a cualquier e.v. V (dim. finita)

Teorema 0.4 *Una aplicación $F : V \to \mathbb{R}$ es una norma de Minkowski si y sólo si verifica: F es una norma (no neces. reversible) suave y con esfera unidad fuertemente convexa.*

Observaciones:

- La convexidad fuerte permite demostrar la positividad y la desigualdad triangular ("estricta")

- También la *Desigualdad Fundamental*:

  $w^i F_{y_i}(y) \leq F(w)$ con igualdad sii $w = \alpha y,\ \alpha \geq 0.$

- La homogeneidad positiva es equivalente (T. Euler) a:

  $\sum_i y^i F_{y_i}(y) = F(y)$

  Por tanto, $\mathrm{Hess} F(y)[y, \cdot] \equiv 0.$

- La relación entre la convexidad fuerte de F^2 y de S: se deriva de

$$\mathrm{Hess} F^2(y)[X,Y] = -\nabla^0_X Y|_y(F^2) = -\sigma(X_y, Y_y)\xi_y(F^2)$$

  donde X, Y extienden campos tangentes a S, σ es la segunda forma fundamental con respecto al normal interior $\xi_y \equiv -y$ y, por tanto $-\xi_y(F^2) = -2F\partial_y F > 0.$

- Resultan equivalentes entonces, para F suave, positiva y posit homog.:
  - S es fuertemente convexa
  - Hess $F^2(y)$ def posit $\forall y \neq 0$
  - Hess $F(y)$ def posit sobre $T_y S$, $\forall y \in S$
- La métrica fundamental g_{ij} se interpreta de manera natural:
  - Sobre vectores tangentes a las esferas S_r de radio r: proporcional a la correspondiente σ de S_r
  - Sobre vectores normales: consecuente con la homog. positiva
    $\mathrm{Hess} F^2(y)[y,y] = 2F^2(y)$

Resumen: para una norma de Minkowski F (norma no neces. revers., suave, fuert. convexa) se tienen como elementos característicos:

- Homogeneidad positiva, codificada en las relaciones de Euler:

  $y^i F_{y^i} = F, y^i F_{y^i y^j} = 0\ldots$, (válidas para toda norma)

- La convexidad fuerte, codificada en:

  - Métrica fundamental: $g_{ij} = (1/2)\ \mathrm{Hess} F^2_{y^i y^j}$ (definida positiva)
  - Desigualdad fundamental: $w^i F_{y_i}(y) \leq F(w)$,

    con igualdad sii $w = \alpha y,\ \alpha \geq 0$.

PARTE II: GENERALIDADES SOBRE VARIEDADES DE FINSLER

1.- Variedades de Finsler

Definición 0.5 *Una métrica de Finsler sobre una variedad M es una aplicación continua $F : TM \to [0, +\infty)$ que verifica:*

1. F *es* C^∞ *in* $TM \setminus 0$,
2. F *es posit. homog. punto a punto:*

   $F(x, \lambda v) = \lambda F(x, v)$ *para todo* $(x, v) \in TM$, $\lambda > 0$,
3. F^2 *es fuertemente convexo punto a punto: la* métrica fundamental

$$g_{ij}(x,v) = \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2(F^2)}{\partial v^i \partial v^j}(x,v)\right] \tag{0.1}$$

es definida positiva $\forall (x, v) \in TM \setminus 0$.

Consecuentemente se tiene:

- Des. triangular "estricta":

  $F(x, v_1 + v_2) \leq F(x, v_1) + F(x, v_2)$, con igualdad sii $v_2 = \alpha v_1$ o $v_1 = \alpha v_2$, para algún $\alpha \geq 0$,

- Des. fundamental:

  $\sum_{ij} g_{ij}(x,v) w^i v^j \leq F(x,w) F(x,v)$, para $v \neq 0$, y con igualdad sii $w = \alpha v$ para algún $\alpha \geq 0$.

- F puede no ser reversible: se define la métrica revertida $\tilde{F}(x,v) = F(x,-v)$

CUIDADO. A diferencia del caso riemanniano, (aparte de que la norma no provenga de un producto escalar) se tiene:

- No reversibilidad
- No diferenciabilidad en 0
- Enorme multiplicidad con respecto a los productos escalares:
    - las normas sobre espacios vectoriales de la misma dimensión no son isométricas en general
    - en particular, tampoco las normas de distintos espacios tangentes de una variedad de Finsler

      (Variedades de Berwald: todas las normas isométricas)

2.- Longitudes y distancias

- Longitud de $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$:

  $\ell_F(\gamma) = \int_a^b F(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))ds.$

- Distancia de p a q: (no necesariamente simétrica)

  $d(p,q) = \inf_{\gamma \in C(p,q)} \ell_F(\gamma)$

  $C(p,q)$: conj. curvas dif. de p a q

- Distancia simetrizada: $d_s(p,q) = (d(p,q) + d(q,p))/2$

- Bolas métricas (abiertas):

  - hacia adelante $B^+(p,r) = \{x \in M : d(p,x) < r\}$,
  - hacia atrás $B^-(p,r) = \{x \in M : d(x,p) < r\}$
  - con la distancia simetrizada d_s, $B_s(p,r) = \{x \in M : d_s(p,x) < r\}$

  (generan la topología como en el caso riemanniano)

- Sucesiones de Cauchy $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset M$
  - adelante: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$:
    $i, j > N \Rightarrow d(x_i, x_j) < \varepsilon$ cuando $i \leq j$
  - atrás: idem cuando $i \geq j$.
- Completitud adelante y atrás

3.- Geodésicas.

Concepto:

- Geodésicas (afínmente param.): puntos críticos del funcional energía

$$E_F(\gamma) = \int_a^b F^2(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))ds, \tag{0.2}$$

(curvas con puntos extremos fijos)

- Afínmente parametrizadas, pero una reparametrización afín que no conserve la orientación no produce una nueva geodésica (en general)

- Dos aplicaciones exponenciales en cada punto

- Algunas diferencias remarcables con el caso riemanniano:
  - Cuando se calcula la segunda derivada del funcional E, la falta de diferenciabilidad en 0 da sus propios problemas.
  - En el caso M compacta:
    - Existen métricas de Finsler con sólo un número finito de geodésicas cerradas (Katok '73, Ziller '82)–abierto en el caso riemanniano.
    - Son genéricas en la topología C^2 las métricas de Finsler cuyas direcciones tangentes a geodésicas cerradas son densas (sist. hamiltonianos, coment. Ziller '82).

Teoremas de Hopf-Rinow:

- *Para la distancia no simetrizada* (esencial la desigualdad fundamental).

  [Versión "adelante"]. Equivalen en toda (M,F) (conexa):

  (a) (M,d) is completo hacia adelante (convergencia de suc. Cauchy).

  (b) (M,F) es geodésicamente completo hacia adelante.

  (c) Para todo $p \in M$, la exponencial hacia adelante $\exp_p$ está definida en todo T_pM.

  (d) Idem para algún $p \in M$.

  (e) Heine-Borel: los conjuntos cerrados y acotados hacia adelante son compactos

  En este caso, (M,F) es convexa (cada par de puntos conectable por una geodésica hacia adelante y, por tanto, también por una hacia atrás -posiblemente con distinta imagen)

- *Para la distancia simetrizada* (¡cuidado! no es un espacio de longitudes).

  Equivalen:

  (a) Heine-Borel: las bolas simetrizadas cerradas son compactas.

  (b) $\overline{B}^{+}(x,r) \cap \overline{B}^{-}(x,r)$ es compacta, para todo $x \in M$, $r > 0$.

  (c) $\overline{B}^{+}(x,r_1) \cap \overline{B}^{-}(y,r_2)$ es compacta, $\forall x,y \in M$, $r_1,r_2 > 0$.

  En este caso, (M,d_s) es completo.

4.- Métricas de Randers

Ejemplo más típico de métrica de Finsler no reversible. Sean:

- (M,h) var. riemanniana
- ω 1-forma sobre M con h-norma $|\omega|_x < 1$, $\forall x \in M$

Definición 0.6 *Métrica de Randers asociada a* (M,h,ω)*:*

$$R(x,v) = \sqrt{h_x(v,v)} + \omega_x(v),$$

Métrica revertida $\tilde{R}$: reemplácese ω por $-\omega$.

PARTE III: RELACIÓN CON E.T. ESTACIONARIOS

1.- Correspondencia variedades de Randers /métricas estacionarias

Definición 0.7 *Espaciotiempo estacionario (estándar, normalizado):*
$M = \mathbb{R} \times S$, $g = -dt^2 + \omega \otimes dt + dt \otimes \omega + g_0$,

- ω 1-forma, g_0 métr. riemanniana (sobre S)
- $K = \partial_t$ campo temporal Killing (conforme): normalización $g(K,K) \equiv -1$ (sólo nos interesan propiedades invariantes conformes)
- Incluso con K prescrito, el desdoblamiento en $\mathbb{R} \times S$ no es único:

  Cualquier hipersuperficie espacial $S_f = (f(x), x) : x \in S\}$ obtenida como el grafo de alguna $f : S \to \mathbb{R}$ genera uno nuevo.

Definición 0.8 *La* métrica de Fermat *es la métrica de Randers asociada a* (M, g, K, S)

$$R = \sqrt{h} + \omega, \qquad \textit{para} \;\; h = g_0 + \omega \otimes \omega.$$

Observación. Cambio S por S_f: nueva métrica de Randers

$$R_f = R + df = \sqrt{h} + \omega_f$$

- $\omega_f = \omega + df$ (igual cohomología)
- Condición $|df|_R < 1$: S_f espacial.
- Métrica h invariante: fibrado ortogonal a K.

2.- Interpretación de la métrica de Fermat

Sea $\gamma(s) = (t(s), x(s))$ una curva en $\mathbb{R} \times S$

1. γ es causal y dirigida al futuro (resp. pasado)

   $\iff t'(s) \geq F(x(s), x'(s))$

   (resp. $t'(s) \leq -\tilde{F}(x(s), x'(s))$)

2. En este caso, si se reparametriza por $t \in [t_0, t_1]$:

   $t_1 - t_0 = \ell_F(x(s))$

3. Y entonces, γ es una pregeodésica luminosa dirigida al futuro

   $\iff x(t)$ es una geodésica unitaria para F.

   [Idea: claramente γ luminosa sii $x(t)$ es F-unitaria. Entonces, γ es crítica para la g-longitud sii $x(t)$ lo es para la F longitud.]

Así:

- Las geodésicas luminosas (fut) que conectan el punto $p := (0, x_0)$ con la línea $L := \mathbb{R} \times \{x_1\}$ se corresponden con las F-geodésicas de x_0 a x_1
- el tiempo mínimo de llegada de p a L (más propiamente, el ínfimo de ese tiempo medido con la coordenada t, a través de curvas causales fut. conectantes) es la F-distancia: $d(x_0, x_1)$.

3.- Una aplicación a la Geom. Lorentziana

Teorema 0.9 *Fijados* (M,g,K,S) *como hasta ahora:*
(1) S *es una hipersuperficie de Cauchy sii* F *es completa (adelante y atrás)*
(2) El espaciotiempo estacionario es:

- *causalmente simple sii* (S,F) *es convexa.*
- *globalmente hiperbólico sii las bolas simetrizadas cerradas* $\bar{B}_s(x,r)$ *de* (S,F) *son compactas.*

Idea dem.

(1) $S \equiv \{0\} \times S$ es Cauchy $\Leftrightarrow$

cada $\{t\} \times S$ lo es $\Leftrightarrow$

cada geod. lum. $(t,x(t))$ corta toda $\{t\} \times S$ $\Leftrightarrow$

toda F geodésica unitaria $x(t)$ está definida para todo valor de t.

(2) Computación de los $I^{\pm}(p), J^{\pm}(p)$ a partir de F.

4.- Una aplicación a la Geom. Finsleriana

- El resultado anterior implica que toda métrica de Randers con $\bar{B}_s(x,r)$ compactas es convexa (lo que se generaliza a toda métrica de Finsler): la convexidad, más que con la completitud, está relacionada con la compacidad de las $\bar{B}_s(x,r)$.

Teorema 0.10 *Sea* (S,R) *Randers y sea* $f : S \to \mathbb{R}$ *tal que define una nueva métrica de Randers* $R_f(x,v) = R(x,v) - df_x(v)$. *Entonces:*

1. *Las pregeodésicas de* R *y* R_f *coinciden.*

2. *Puede escogerse* f *tal que* R_f *es geodésicamente completa sii las* $\bar{B}_s(x,r)$ *son compactas.*

Idea dem.

1. El término en df no influye para propiedades variacionales de curvas con extremos fijos.

2. Sea el e.t. estacionario (M,g) asociado a (R,F)

- $\bar{B}_s(x,r)$ compactas $\iff$ (M,g) es glob. hip.
- (M,g) es glob. hip. $\iff$ (M,g) admite una hip Cauchy espacial tipo grafo S_f
- Una hip. espacial tipo grafo S_f es Cauchy $\iff$ R_f es completa.

5.- Otras aplicaciones

1. Cálculo de los dominios de dependencia de un conjunto acausal.
2. Diferenciabilidad de la función distancia finsleriana a una subvariedad
3. Posible relación entre el tensor de Weyl del espaciotiempo y la curvatura bandera de la métrica de Fermat, apuntada por Gibbons (como conjetura en el caso conformemente llano).

Referencias

[1] D. Bao, S.-S. Chern, and Z. Shen, *An introduction to Riemann-Finsler geometry*, vol. 200 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000.

[2] E. Caponio, M. A. Javaloyes and M. Sánchez, On the interplay between Lorentzian Causality and Finsler metrics of Randers type, arXiv:0903.3501

[3] G. W. Gibbons, C. A. R. Herdeiro, C. M. Warnick, and M. C. Werner, *Stationary Metrics and Optical Zermelo-Randers-Finsler Geometry*, Phys. Rev. D 79:044022,2009 arXiv: 0811.2877v1[gr-qc].