

*La aplicación de Gauss de superficies espaciales
de curvatura media constante en
espaciotiempos de Robertson-Walker
generalizados*

Magdalena Caballero

Departamento de Matemáticas
Universidad de Córdoba

Workshop on Differential Geometry and Relativity
Cedeira, 31 de octubre

CARACTERIZACIONES DE LOS HIPERPLANOS MAXIMALES VS. CMCs EN \mathbb{L}^n

Introduction

CMCs completas con ángulo hiperbólico acotado

CMCs completas entre slices

La ecuación diferencial de CMCs

Bibliografía

Teorema de Calabi-Bernstein en \mathbb{L}^n ($n = 3$ -Calabi-70)-(Cheng y Yau-76): las únicas superficies maximales completas en \mathbb{L}^n son los hiperplanos.

Superficies espaciales de curvatura media constante (CMCs) en \mathbb{L}^n : existen CMCs completas en \mathbb{L}^n que no son hiperplanos. \mathbb{H}^{n-1}

Los hiperplanos son las únicas CMCs completas en \mathbb{L}^n . . .

. . . comprendidas entre dos hiperplanos. Aledo y Alfás-00

. . . con imagen hiperbólica acotada. Xin-91 y Aiyama-92

CARACTERIZACIONES DE LOS HIPERPLANOS MAXIMALES VS. CMCs EN \mathbb{L}^n

Introduction

CMCs completas con ángulo hiperbólico acotado

CMCs completas entre slices

La ecuación diferencial de CMCs

Bibliografía

Teorema de Calabi-Bernstein en \mathbb{L}^n ($n = 3$ -Calabi-70)-(Cheng y Yau-76): las únicas superficies maximales completas en \mathbb{L}^n son los hiperplanos.

Superficies espaciales de curvatura media constante (CMCs) en \mathbb{L}^n : existen CMCs completas en \mathbb{L}^n que no son hiperplanos. \mathbb{H}^{n-1}

Los hiperplanos son las únicas CMCs completas en \mathbb{L}^n . . .

. . . comprendidas entre dos hiperplanos. Aledo y Alías-00

. . . con imagen hiperbólica acotada. Xin-91 y Aiyama-92

CARACTERIZACIONES DE LOS HIPERPLANOS MAXIMALES VS. CMCs EN \mathbb{L}^n

Introduction

CMCs completas con ángulo hiperbólico acotado

CMCs completas entre slices

La ecuación diferencial de CMCs

Bibliografía

Teorema de Calabi-Bernstein en \mathbb{L}^n ($n = 3$ -Calabi-70)-(Cheng y Yau-76): las únicas superficies maximales completas en \mathbb{L}^n son los hiperplanos.

Superficies espaciales de curvatura media constante (CMCs) en \mathbb{L}^n : existen CMCs completas en \mathbb{L}^n que no son hiperplanos. \mathbb{H}^{n-1}

Los hiperplanos son las únicas CMCs completas en \mathbb{L}^n . . .

. . . comprendidas entre dos hiperplanos. Aledo y Alías-00

. . . con imagen hiperbólica acotada. Xin-91 y Aiyama-92

CARACTERIZACIONES DE LOS HIPERPLANOS MAXIMALES VS. CMCs EN \mathbb{L}^n

Introduction

CMCs completas con ángulo hiperbólico acotado

CMCs completas entre slices

La ecuación diferencial de CMCs

Bibliografía

Teorema de Calabi-Bernstein en \mathbb{L}^n ($n = 3$ -Calabi-70)-(Cheng y Yau-76): las únicas superficies maximales completas en \mathbb{L}^n son los hiperplanos.

Superficies espaciales de curvatura media constante (CMCs) en \mathbb{L}^n : existen CMCs completas en \mathbb{L}^n que no son hiperplanos. \mathbb{H}^{n-1}

Los hiperplanos son las únicas CMCs completas en \mathbb{L}^n . . .

. . . comprendidas entre dos hiperplanos. **Aledo y Alías-00**

. . . con imagen hiperbólica acotada. **Xin-91 y Aiyama-92**

CARACTERIZACIONES DE LOS HIPERPLANOS MAXIMALES VS. CMCs EN \mathbb{L}^n

Introduction

CMCs completas con ángulo hiperbólico acotado

CMCs completas entre slices

La ecuación diferencial de CMCs

Bibliografía

Teorema de Calabi-Bernstein en \mathbb{L}^n ($n = 3$ -Calabi-70)-(Cheng y Yau-76): las únicas superficies maximales completas en \mathbb{L}^n son los hiperplanos.

Superficies espaciales de curvatura media constante (CMCs) en \mathbb{L}^n : existen CMCs completas en \mathbb{L}^n que no son hiperplanos. \mathbb{H}^{n-1}

Los hiperplanos son las únicas CMCs completas en \mathbb{L}^n . . .

. . . comprendidas entre dos hiperplanos. **Aledo y Alías-00**

. . . con imagen hiperbólica acotada. **Xin-91 y Aiyama-92**

CARACTERIZACIONES DE LOS HIPERPLANOS MAXIMALES VS. CMCs EN \mathbb{L}^n

Introduction

CMCs completas con ángulo hiperbólico acotado

CMCs completas entre slices

La ecuación diferencial de CMCs

Bibliografía

Los hiperplanos son las únicas CMCs completas en \mathbb{L}^n con imagen hiperbólica acotada.

Consecuencia del principio del máximo generalizado de Omori-Yau y del Teorema de Calabi-Bernstein de Cheng y Yau.

Una versión previa más débil (Palmer-90): Para cada $H \in \mathbb{R} - \{0\}$ existe $\tau = \tau(H, n) \in \mathbb{R}$ tal que no existen CMCs completas en \mathbb{L}^n con curvatura H con imagen hiperbólica contenida en una bola geodésica de radio menor que τ .

Usa un resultado técnico sobre los autovalores del Laplaciano.

CARACTERIZACIONES DE LOS HIPERPLANOS MAXIMALES VS. CMCs EN \mathbb{L}^n

Introduction

CMCs completas con ángulo hiperbólico acotado

CMCs completas entre slices

La ecuación diferencial de CMCs

Bibliografía

Los hiperplanos son las únicas CMCs completas en \mathbb{L}^n con imagen hiperbólica acotada.

Consecuencia del principio del máximo generalizado de Omori-Yau y del Teorema de Calabi-Bernstein de Cheng y Yau.

Una versión previa más débil (Palmer-90): Para cada $H \in \mathbb{R} - \{0\}$ existe $\tau = \tau(H, n) \in \mathbb{R}$ tal que no existen CMCs completas en \mathbb{L}^n con curvatura H con imagen hiperbólica contenida en una bola geodésica de radio menor que τ .

Usa un resultado técnico sobre los autovalores del Laplaciano.

CARACTERIZACIONES DE LOS HIPERPLANOS MAXIMALES VS. CMCs EN \mathbb{L}^n

Introduction

CMCs
completas con
ángulo
hiperbólico
acotado

CMCs
completas entre
slices

La ecuación
diferencial de
CMCs

Bibliografía

Los hiperplanos son las únicas CMCs completas en \mathbb{L}^n con imagen hiperbólica acotada.

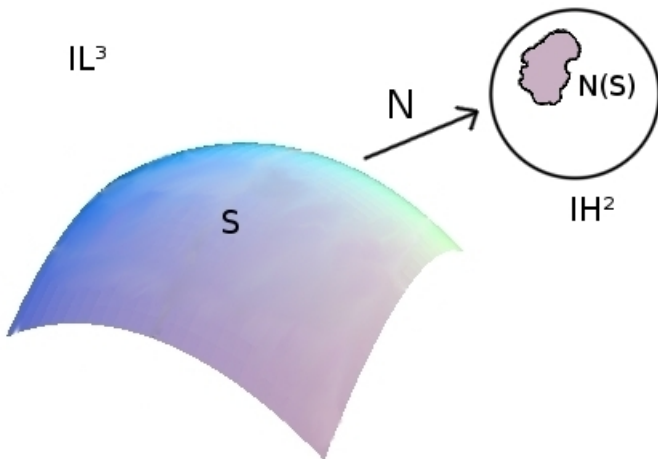
Consecuencia del principio del máximo generalizado de Omori-Yau y del Teorema de Calabi-Bernstein de Cheng y Yau.

Una versión previa más débil (Palmer-90): Para cada $H \in \mathbb{R} - \{0\}$ existe $\tau = \tau(H, n) \in \mathbb{R}$ tal que no existen CMCs completas en \mathbb{L}^n con curvatura H con imagen hiperbólica contenida en una bola geodésica de radio menor que τ .

Usa un resultado técnico sobre los autovalores del Laplaciano.

PASO A UN GRW DE DIM 3

Los planos son las únicas CMCs completas en \mathbb{L}^3 con **imagen hiperbólica** acotada.



Espaciotiempo de Robertson-Walker generalizado

$M := I \times F$ con la métrica Lorentziana

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = -\pi_I^*(dt^2) + f(\pi_I)^2 \pi_F^*(g),$$

donde I es un intervalo,

(F, g) es una superficie Riemanniana,

$f > 0$ es una función en I ,

π_I y π_F son las proyecciones sobre I y F , respectivamente.

Sea $x : S \rightarrow M$ una superficie espacial en M y $N \in \mathfrak{X}^\perp(S)$ el único campo normal unitario temporal con la orientación de ∂_t .

Si $\pi_I \circ x$ es constante, S se llama SLICE.

Espaciotiempo de Robertson-Walker generalizado

$M := I \times F$ con la métrica Lorentziana

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = -\pi_I^*(dt^2) + f(\pi_I)^2 \pi_F^*(g),$$

donde I es un intervalo,

(F, g) es una superficie Riemanniana,

$f > 0$ es una función en I ,

π_I y π_F son las proyecciones sobre I y F , respectivamente.

Sea $x : S \rightarrow M$ una superficie espacial en M y $N \in \mathfrak{X}^\perp(S)$ el único campo normal unitario temporal con la orientación de ∂_t .

Si $\pi_I \circ x$ es constante, S se llama **SLICE**.

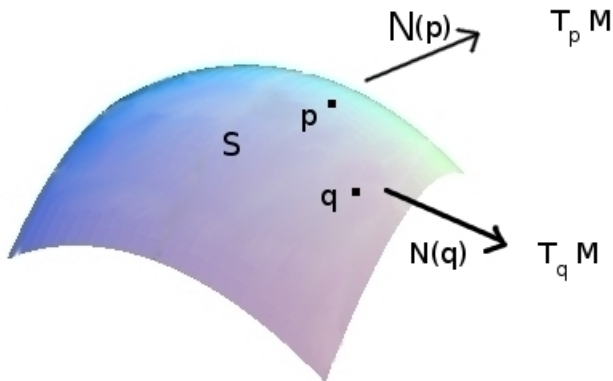
Introduction

CMCs completas con ángulo hiperbólico acotado

CMCs completas entre slices

La ecuación diferencial de CMCs

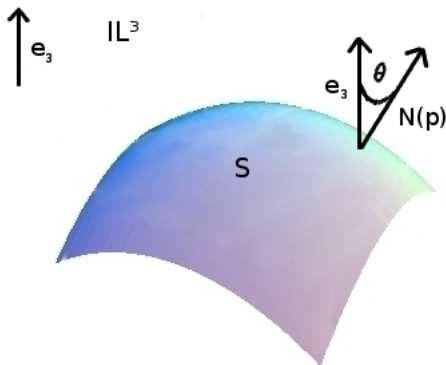
Bibliografía



Los slices son las únicas CMCs completas en un GRW con . . . ?

PASO A UN GRW DE DIM 3

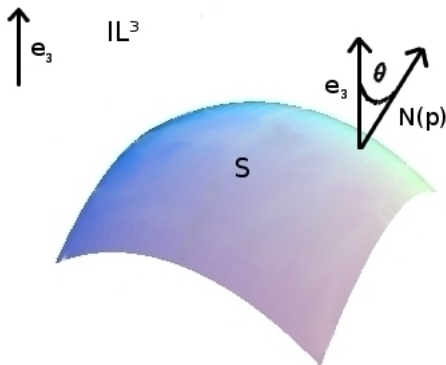
Dada una superficie espacial en \mathbb{L}^3 , llamamos ángulo hiperbólico al ángulo entre el normal a la superficie y el eje coordenado temporal.



Los planos son las únicas CMCs completas en \mathbb{L}^3 con ángulo hiperbólico acotado.

PASO A UN GRW DE DIM 3

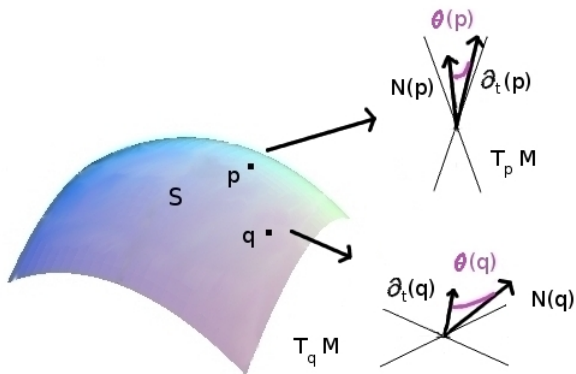
Dada una superficie espacial en \mathbb{L}^3 , llamamos ángulo hiperbólico al ángulo entre el normal a la superficie y el eje coordenado temporal.



Los planos son las únicas CMCs completas en \mathbb{L}^3 con **ángulo hiperbólico** acotado.

PASO A UN GRW DE DIM 3

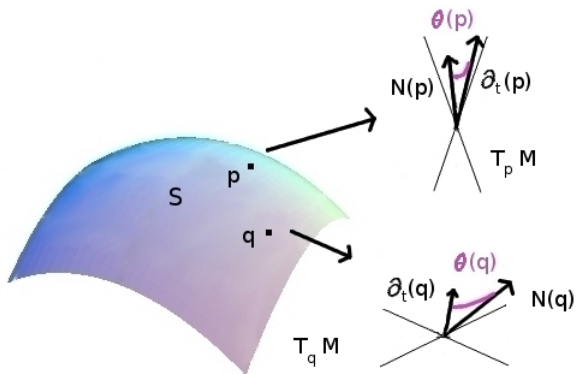
Dada una superficie espacial en un GRW de dimensión 3, M , llamamos ángulo hiperbólico al ángulo entre el normal a la superficie y el campo temporal unitario ∂_t .



¿Los slices son las únicas CMCs completas en M con ángulo hiperbólico acotado?

PASO A UN GRW DE DIM 3

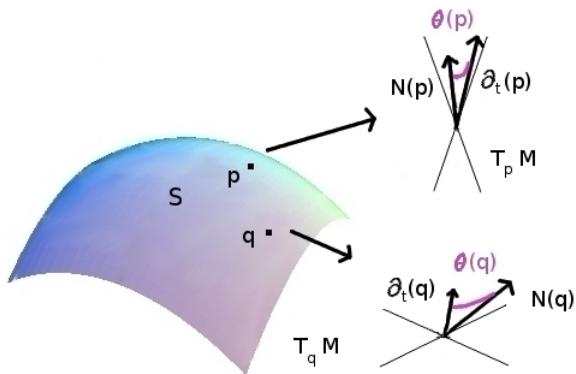
Dada una superficie espacial en un GRW de dimensión 3, M , llamamos ángulo hiperbólico al ángulo entre el normal a la superficie y el campo temporal unitario ∂_t .



¿Los slices son las únicas CMCs completas en M con ángulo hiperbólico acotado?

PASO A UN GRW DE DIM 3

Dada una superficie espacial en un GRW de dimensión 3, M , llamamos ángulo hiperbólico al ángulo entre el normal a la superficie y el campo temporal unitario ∂_t .



¿Los slices son las únicas CMCs completas en M con ángulo hiperbólico acotado?

RESULTADOS EN ESTA LÍNEA

Teorema(Latorre-Romero-02): Sea S una hypersuperficie CMC en un GRW. Si θ alcanza un máximo local en p_0 y además ocurre al menos una de las dos siguientes cosas:

- $f''(\pi_I(p_0)) < 0$
- El tensor de Ricci de la fibra es semi-definido positivo en $\pi_F(p_0)$

Entonces S es un subconjunto abierto de un slice.

EL ÁNGULO HIPERBÓLICO Y LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE CMCs

Introduction

CMCs completas con ángulo hiperbólico acotado

CMCs completas entre slices

La ecuación diferencial de CMCs

Bibliografía

Ecuación diferencial de superficies con curvatura media constante H

$$\operatorname{div} \left(\frac{Du}{f(u)\sqrt{f(u)^2 - |Du|^2}} \right) = 2H - \frac{f'(u)}{\sqrt{f(u)^2 - |Du|^2}} \left(2 + \frac{|Du|^2}{f(u)^2} \right) \quad (\text{E1})$$

$$|Du| < \lambda f(u), \quad 0 < \lambda < 1, \quad (\text{E2})$$

donde $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$,

$u \in C^\infty(F)$

(F, g) es una superficie Riemanniana y

D denota el gradiente en F .

EL ÁNGULO HIPERBÓLICO Y LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE CMCs

Si u es una solución, entonces su grafo

$$\Sigma_u = \{(u(p), p) : p \in F\}$$

es una superficie espacial con curvatura media constante H en el GRW $M = I \times_f F$.

La condición (E2) es necesaria para asegurar que Σ_u sea completa.

Si reescribimos (E2) en términos de θ , el ángulo hiperbólico de Σ_u ,

$$\cosh \theta < \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \quad 0 < \lambda < 1 \quad (E2)$$

Las soluciones de (E) dan lugar a superficies espaciales de curvatura media constante H y ángulo hiperbólico acotado en M .

EL ÁNGULO HIPERBÓLICO Y LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE CMCs

Si u es una solución, entonces su grafo

$$\Sigma_u = \{(u(p), p) : p \in F\}$$

es una superficie espacial con curvatura media constante H en el GRW $M = I \times_f F$.

La condición (E2) es necesaria para asegurar que Σ_u sea completa.

Si reescribimos (E2) en términos de θ , el ángulo hiperbólico de Σ_u ,

$$\cosh \theta < \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \quad 0 < \lambda < 1 \quad (E2)$$

Las soluciones de (E) dan lugar a superficies espaciales de curvatura media constante H y ángulo hiperbólico acotado en M .

EL ÁNGULO HIPERBÓLICO Y LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE CMCs

Si u es una solución, entonces su grafo

$$\Sigma_u = \{(u(p), p) : p \in F\}$$

es una superficie espacial con curvatura media constante H en el GRW
 $M = I \times_f F$.

La condición (E2) es necesaria para asegurar que Σ_u sea completa.

Si reescribimos (E2) en términos de θ , el ángulo hiperbólico de Σ_u ,

$$\cosh \theta < \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \quad 0 < \lambda < 1 \quad (E2)$$

Las soluciones de (E) dan lugar a superficies espaciales de curvatura media constante H y ángulo hiperbólico acotado en M .

Introduction

CMCs
completas con
ángulo
hiperbólico
acotado

CMCs
completas entre
slices

La ecuación
diferencial de
CMCs

Bibliografía

PUNTOS A DESARROLLAR

- CMCs completas con ángulo hiperbólico acotado
- CMCs completas comprendidas entre dos slices
- La ecuación diferencial de CMCs

Introduction

CMCs
completas con
ángulo
hiperbólico
acotado

CMCs
completas entre
slices

La ecuación
diferencial de
CMCs

Bibliografía

PUNTOS A DESARROLLAR

- CMCs completas con ángulo hiperbólico acotado
- CMCs completas comprendidas entre dos slices
- La ecuación diferencial de CMCs

Introduction

CMCs
completas con
ángulo
hiperbólico
acotado

CMCs
completas entre
slices

La ecuación
diferencial de
CMCs

Bibliografía

PUNTOS A DESARROLLAR

- CMCs completas con ángulo hiperbólico acotado
- CMCs completas comprendidas entre dos slices
- La ecuación diferencial de CMCs

BREVES PRELIMINARES

$M = I \times_f F$ un GRW de dimensión 3

$x : S \rightarrow M$ una superficie espacial,

N su normal unitario con la orientación de $-\partial_t$,

A su operador forma,

$H = -\frac{1}{2} \text{traza}(A)$ su curvatura media y

$$t = \pi_I \circ x$$

Entonces $\langle N, \partial_t \rangle = \cosh \theta$

S es un slice sii $t \equiv t_0$ sii $N = -\partial_t$ sii $\theta \equiv 0$

En este caso S es totalmente umbilical y $H = -\frac{f'(t_0)}{f(t_0)}$

BREVES PRELIMINARES

$M = I \times_f F$ un GRW de dimensión 3

$x : S \rightarrow M$ una superficie espacial,

N su normal unitario con la orientación de $-\partial_t$,

A su operador forma,

$H = -\frac{1}{2} \text{traza}(A)$ su curvatura media y

$$t = \pi_I \circ x$$

Entonces $\langle N, \partial_t \rangle = \cosh \theta$

S es un slice sii $t \equiv t_0$ sii $N = -\partial_t$ sii $\theta \equiv 0$

En este caso S es totalmente umbilical y $H = -\frac{f'(t_0)}{f(t_0)}$

BREVES PRELIMINARES

$M = I \times_f F$ un GRW de dimensión 3

$x : S \rightarrow M$ una superficie espacial,

N su normal unitario con la orientación de $-\partial_t$,

A su operador forma,

$H = -\frac{1}{2} \text{traza}(A)$ su curvatura media y

$$t = \pi_I \circ x$$

Entonces $\langle N, \partial_t \rangle = \cosh \theta$

S es un slice sii $t \equiv t_0$ sii $N = -\partial_t$ sii $\theta \equiv 0$

En este caso S es totalmente umbilical y $H = -\frac{f'(t_0)}{f(t_0)}$

CONDICIONES DE ENERGÍA

En una variedad Lorentziana con tensor de Ricci $\overline{\text{Ric}}$

Condición de energía ubicua

$$\overline{\text{Ric}}(Z, Z) > 0 \quad \text{para todo } Z \text{ temporal}$$

Condición de convergencia temporal (TCC): “la gravedad en media atrae”

$$\overline{\text{Ric}}(Z, Z) \geq 0 \quad \text{para todo } Z \text{ temporal}$$

Condición de convergencia nula (NCC):

$$\overline{\text{Ric}}(Z, Z) \geq 0 \quad \text{para todo } Z \text{ nulo}$$

CONDICIONES DE ENERGÍA

En una variedad Lorentziana con tensor de Ricci $\overline{\text{Ric}}$

Condición de energía ubicua



$$\overline{\text{Ric}}(Z, Z) > 0 \quad \text{para todo } Z \text{ temporal}$$

Condición de convergencia temporal (TCC): “la gravedad en media atrae”



$$\overline{\text{Ric}}(Z, Z) \geq 0 \quad \text{para todo } Z \text{ temporal}$$

Condición de convergencia nula (NCC):

$$\overline{\text{Ric}}(Z, Z) \geq 0 \quad \text{para todo } Z \text{ nulo}$$

CONDICIONES DE ENERGÍA EN UN GRW

Si K_F es la curvatura de Gauss de (F, g) :

Condición de energía ubicua $\implies f'' < 0$

Condición de convergencia temporal (TCC):

$$f'' \leq 0 \quad \text{y} \quad \frac{K^F(\pi_F)}{f^2} - (\log f)'' \geq 0$$

Condición de convergencia nula (NCC):

$$\frac{K^F(\pi_F)}{f^2} - (\log f)'' \geq 0$$

GRW PROPIOS VS. NO PROPIOS

M se dice propio si f no es constante en ningún entorno.

Teorema(C-Ro-Ru): Sea M un GRW propio cumpliendo TCC y con $K_F \geq 0$.

Toda superficie completa espacial en M cumpliendo

$$H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2},$$

es un slice.

El resultado no es cierto cuando quitamos propio, ni siquiera para CMCs.

$$I = \mathbb{R}, \quad F = \mathbb{R}^2 \quad \text{y} \quad f \equiv 1 \longrightarrow \mathbb{L}^3$$

Cualquier plano espacial que no sea un slice

es una CMC completa cumpliendo $H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2}$

¿Y si pedimos que θ esté acotado?

GRW PROPIOS VS. NO PROPIOS

M se dice propio si f no es constante en ningún entorno.

Teorema(C-Ro-Ru): Sea M un GRW propio cumpliendo TCC y con $K_F \geq 0$.

Toda superficie completa espacial en M cumpliendo

$$H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2},$$

es un slice.

El resultado **no** es cierto cuando **quitamos propio**, ni siquiera para CMCs.

$$I = \mathbb{R}, \quad F = \mathbb{R}^2 \quad \text{y} \quad f \equiv 1 \longrightarrow \mathbb{L}^3$$

Cualquier plano espacial que no sea un slice

es una CMC completa cumpliendo $H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2}$

¿Y si pedimos que θ esté acotado?

GRW PROPIOS VS. NO PROPIOS

M se dice propio si f no es constante en ningún entorno.

Teorema(C-Ro-Ru): Sea M un GRW propio cumpliendo TCC y con $K_F \geq 0$.

Toda superficie completa espacial en M cumpliendo

$$H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2},$$

es un slice.

El resultado **no** es cierto cuando **quitamos propio**, ni siquiera para CMCs.

$$I = \mathbb{R}, \quad F = \mathbb{R}^2 \quad \text{y} \quad f \equiv 1 \longrightarrow \mathbb{L}^3$$

Cualquier plano espacial que no sea un slice

es una CMC completa cumpliendo $H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2}$

¿Y si pedimos que θ esté acotado?

UN RESULTADO TÉCNICO

Lema(Ro-Ru):

Sea \bar{M} una variedad Riemanniana y sea $v \in C^2(\bar{M})$ tal que

$$v\Delta v \geq 0.$$

Si B_R es una bola geodésica de radio R alrededor de $p \in \bar{M}$, entonces para cada $r > 0$ tal que $r < R$ se tiene

$$\int_{B_r} |\nabla v|^2 dV \leq \frac{4 \sup_{B_R} v^2}{\mu_{r,R}},$$

donde B_r es una bola geodésica de radio r alrededor de p en \bar{M} y $\frac{1}{\mu_{r,R}}$ es la capacidad del anillo $B_R \setminus \bar{B}_r$.

APLICAMOS EL RESULTADO A $v = \cosh \theta$

¿ $\cosh \theta \Delta \cosh \theta \geq 0$?

$$\cosh \theta \Delta \cosh \theta \geq \sinh^2 \theta \left\{ \cosh^2 \theta \left(\frac{K^F(\pi_F)}{f(t)^2} - 2(\log f)''(t) \right) + \right.$$

$$\left. \left(\frac{f'(t)}{f(t)} + H \cosh \theta \right)^2 + \cosh^2 \theta \left(\frac{f'(t)^2}{f(t)^2} - H^2 \right) \right\}$$

$$\geq \sinh^2 \theta \left\{ \cosh^2 \theta \left(\frac{K^F(\pi_F)}{f(t)^2} - 2(\log f)''(t) \right) + \cosh^2 \theta \left(\frac{f'(t)^2}{f(t)^2} - H^2 \right) \right\}$$

APLICAMOS EL RESULTADO A $v = \cosh \theta$

¿ $\cosh \theta \Delta \cosh \theta \geq 0$?

$$\cosh \theta \Delta \cosh \theta \geq \sinh^2 \theta \left\{ \cosh^2 \theta \left(\frac{K^F(\pi_F)}{f(t)^2} - 2(\log f)''(t) \right) + \left(\frac{f'(t)}{f(t)} + H \cosh \theta \right)^2 + \cosh^2 \theta \left(\frac{f'(t)^2}{f(t)^2} - H^2 \right) \right\}$$

donde hemos usado que $|Hess t|^2 \geq 0$

$$\geq \sinh^2 \theta \left\{ \cosh^2 \theta \left(\frac{K^F(\pi_F)}{f(t)^2} - 2(\log f)''(t) \right) + \cosh^2 \theta \left(\frac{f'(t)^2}{f(t)^2} - H^2 \right) \right\}$$

APLICAMOS EL RESULTADO A $v = \cosh \theta$

¿ $\cosh \theta \Delta \cosh \theta \geq 0$?

$$\cosh \theta \Delta \cosh \theta \geq \sinh^2 \theta \left\{ \cosh^2 \theta \left(\frac{K^F(\pi_F)}{f(t)^2} - 2(\log f)''(t) \right) + \left(\frac{f'(t)}{f(t)} + H \cosh \theta \right)^2 + \cosh^2 \theta \left(\frac{f'(t)^2}{f(t)^2} - H^2 \right) \right\}$$

$$\geq \sinh^2 \theta \left\{ \cosh^2 \theta \left(\frac{K^F(\pi_F)}{f(t)^2} - 2(\log f)''(t) \right) + \cosh^2 \theta \left(\frac{f'(t)^2}{f(t)^2} - H^2 \right) \right\}$$

UNA ESTIMACIÓN LOCAL

Teorema(C-Ro-Ru):

Sea M un GRW propio cumpliendo NCC y $(\log f)'' \leq 0$.

Sea S una CMC tal que

$$H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2}$$

Si D_R es un disco geodésico de radio R alrededor de $p \in S$, entonces para cada $r > 0$ tal que $r < R$ se tiene

$$\int_{D_r} |\nabla \cosh \theta|^2 dV \leq \frac{C}{\mu_{r,R}},$$

donde D_r es un disco geodésico de radio r alrededor de p en S ,

$\frac{1}{\mu_{r,R}}$ es la capacidad del anillo $A_{r,R} := D_R \setminus \bar{D}_r$

y $C = C(p, R) > 0$ es constante.

Bajo las hipótesis del teorema anterior, si la superficie S tiene ángulo hiperbólico acotado, entonces podemos elegir C de forma independiente:

- 1 Si S no es compacta, completa y es parabólica, entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_{r,R}} = 0,$$

y entonces $\nabla \cosh \theta = 0$, luego θ es constante.

- 2 Si S es compacta, la desigualdad previa al teorema asegura que $\Delta \cosh \theta \geq 0$ y por tanto θ es constante.

Además, también de la desigualdad anterior se deduce que o bien $\theta = 0$ o bien $H = 0$.

Bajo las hipótesis del teorema anterior, si la superficie S tiene ángulo hiperbólico acotado, entonces podemos elegir C de forma independiente:

- 1 Si S no es compacta, completa y es parabólica, entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_{r,R}} = 0,$$

y entonces $\nabla \cosh \theta = 0$, luego θ es constante.

- 2 Si S es compacta, la desigualdad previa al teorema asegura que $\Delta \cosh \theta \geq 0$ y por tanto θ es constante.

Además, también de la desigualdad anterior se deduce que o bien $\theta = 0$ o bien $H = 0$.

RESULTADOS

Teorema(C-Ro-Ru): Sea M un GRW cumpliendo $(\log f)'' \leq 0$ y NCC

Toda CMC completa con ángulo hiperbólico acotado y cumpliendo

$$H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2}$$

es un slice o una superficie tot. geodésica con curvatura de Gauss nula.

Teorema(C-Ro-Ru): Sea M un GRW propio cumpliendo TCC y con $K_F \geq 0$. Toda CMC completa en M cumpliendo $H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2}$, es un slice.

Notas:

- TCC $\Rightarrow (\log f)'' \leq 0$ y $K^F \geq 0$
- En $\mathbb{L}^3 = \mathbb{R} \times_1 \mathbb{R}^2$ cualquier plano espacial que no sea un slice es una superficie totalmente geodésica con curvatura de Gauss nula.

RESULTADOS

Teorema(C-Ro-Ru): Sea M un GRW cumpliendo $(\log f)'' \leq 0$ y $K^F \geq 0$. Toda CMC completa con ángulo hiperbólico acotado y cumpliendo

$$H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2}$$

es un slice o una superficie tot. geodésica con curvatura de Gauss nula.

Teorema(C-Ro-Ru): Sea M un GRW propio cumpliendo TCC y con $K_F \geq 0$. Toda CMC completa en M cumpliendo $H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2}$, es un slice.

Notas:

- TCC $\Rightarrow (\log f)'' \leq 0$ y $K^F \geq 0$
- En $\mathbb{L}^3 = \mathbb{R} \times_1 \mathbb{R}^2$ cualquier plano espacial que no sea un slice es una superficie totalmente geodésica con curvatura de Gauss nula.

RESULTADOS

Teorema(C-Ro-Ru): Sea M un GRW cumpliendo $(\log f)'' \leq 0$ y $K^F \geq 0$
Toda CMC completa con ángulo hiperbólico acotado y cumpliendo

$$H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2}$$

es un slice o una superficie tot. geodésica con curvatura de Gauss nula.

Teorema(C-Ro-Ru): Sea M un GRW propio cumpliendo TCC y con $K_F \geq 0$. Toda CMC completa en M cumpliendo $H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2}$, es un slice.

Notas:

- TCC $\Rightarrow (\log f)'' \leq 0$ y $K^F \geq 0$
- En $\mathbb{L}^3 = \mathbb{R} \times_1 \mathbb{R}^2$ cualquier plano espacial que no sea un slice es una superficie totalmente geodésica con curvatura de Gauss nula.

Para asegurar la parabolicidad en el caso no compacto, hemos usado:

- *Teorema (Ahlfors y Blanc-Fiala-Huber)*: toda superficie Riemanniana completa y con curvatura de Gauss no negativa es parabólica.
- *Proposición (C-Ro-Ru)*: Sea S una superficie espacial en un GRW que cumple $(\log f)'' \leq 0$ y cuya fibra tiene curvatura $K^F \geq 0$. Si

$$H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2},$$

entonces la curvatura de S es no negativa.

COROLARIOS

Corolario(C-Ro-Ru): Sea M un GRW cumpliendo $(\log f)'' \leq 0$ y $K^F \geq 0$.
Toda CMC *completa*, con ángulo hiperbólico acotado y cumpliendo

$$0 < H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2}$$

es un slice.

Corolario(C-Ro-Ru): Sea M un GRW cumpliendo $(\log f)'' \leq 0$ y $K^F \geq 0$.
Sea S una CMC *completa*, con ángulo hiperbólico acotado y cumpliendo

$$H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2}.$$

Si $K^F(\pi_F(p)) > 0$ ó $(\log f)''(\pi_I(p)) < 0$ para algún $p \in S$, entonces S es un slice.

COROLARIOS

Corolario(C-Ro-Ru): Sea M un GRW cumpliendo $(\log f)'' \leq 0$ y $K^F \geq 0$.
Toda CMC **completa**, con ángulo hiperbólico acotado y cumpliendo

$$0 < H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2}$$

es un slice.

Corolario(C-Ro-Ru): Sea M un GRW cumpliendo $(\log f)'' \leq 0$ y $K^F \geq 0$.
Sea S una CMC **completa**, con ángulo hiperbólico acotado y cumpliendo

$$H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2}.$$

Si $K^F(\pi_F(p)) > 0$ ó $(\log f)''(\pi_I(p)) < 0$ para algún $p \in S$, entonces S es un slice.

CMCs COMPLETAS ENTRE SLICES

Sea M un GRW cumpliendo $(\log f)'' \leq 0$ y $K^F \geq 0$.

Sea S una superficie CMC completa comprendida entre dos slices.

$$\langle N, \partial_t \rangle = \cosh \theta \text{ está acotada y } H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2}.$$

Teorema (C-Ro-Ru): en el ambiente anterior

S es un slice o es tot. geodésica y con curvatura de Gauss nula.

Teorema(C-Ro-Ru): en el ambiente anterior

S es totalmente umbilical

CMCs COMPLETAS ENTRE SLICES

Sea M un GRW cumpliendo $(\log f)'' \leq 0$ y $K^F \geq 0$.

Sea S una superficie CMC completa comprendida entre dos slices.

$$\langle N, \partial_t \rangle = \cosh \theta \text{ está acotada y } H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2}.$$

Teorema (C-Ro-Ru): en el ambiente anterior

S es un slice o es tot. geodésica y con curvatura de Gauss nula.

Teorema(C-Ro-Ru): en el ambiente anterior

S es totalmente umbilical

CMCs COMPLETAS ENTRE SLICES

Sea M un GRW cumpliendo $(\log f)'' \leq 0$ y $K^F \geq 0$.

Sea S una superficie CMC completa comprendida entre dos slices.

$$\langle N, \partial_t \rangle = \cosh \theta \text{ está acotada y } H^2 \leq \frac{f'(t)^2}{f(t)^2}.$$

Teorema (C-Ro-Ru): en el ambiente anterior

S es un slice o es tot. geodésica y con curvatura de Gauss nula.

Teorema(C-Ro-Ru): en el ambiente anterior

S es totalmente umbilical

CMCs COMPLETAS ENTRE SLICES

Corolario(C-Ro-Ru):

Sea M un GRW cumpliendo $(\log f)'' \leq 0$ y $K^F \geq 0$.

Sea S una CMC completa comprendida entre dos slices.

Si $K^F(\pi_F(p)) > 0$ ó $(\log f)''(\pi_I(p)) < 0$ para algún $p \in S$, entonces S es un slice.

Corolario(C-Ro-Ru):

Sea M un GRW cumpliendo $(\log f)'' \leq 0$ y $K^F \geq 0$.

Sea S una CMC completa comprendida entre dos slices.

Si $K^F > 0$ ó $f'' < 0$, entonces S es un slice.

CMCs COMPLETAS ENTRE SLICES

Corolario(C-Ro-Ru):

Sea M un GRW cumpliendo $(\log f)'' \leq 0$ y $K^F \geq 0$.

Sea S una CMC completa comprendida entre dos slices.

Si $K^F(\pi_F(p)) > 0$ ó $(\log f)''(\pi_I(p)) < 0$ para algún $p \in S$, entonces S es un slice.

Corolario(C-Ro-Ru):

Sea M un GRW cumpliendo $(\log f)'' \leq 0$ y $K^F \geq 0$.

Sea S una CMC completa comprendida entre dos slices.

Si $K^F > 0$ ó $f'' < 0$, entonces S es un slice.

Ecuación diferencial de superficies con curvatura media constante H

$$\operatorname{div} \left(\frac{Du}{f(u)\sqrt{f(u)^2 - |Du|^2}} \right) = 2H - \frac{f'(u)}{\sqrt{f(u)^2 - |Du|^2}} \left(2 + \frac{|Du|^2}{f(u)^2} \right) \quad (\text{E1})$$

$$\cosh \theta < \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (\text{E2})$$

donde $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$, $u \in C^\infty(F)$, (F, g) es una superficie Riemanniana y θ es el ángulo hiperbólico de

$$\Sigma_u = \{(u(p), p) : p \in F\}$$

Si u es una solución, entonces Σ_u es una CMC con curvatura media H en el GRW $M = I \times_f F$.

Si (F, g) es completa, $\inf(f(u)) > 0$ y u es entera, entonces Σ_u es completa.

Llamamos $\mathbf{B}_f = \{-f'(t)/f(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}$, entonces

Si u es una solución, entonces Σ_u es una CMC con curvatura media H en el GRW $M = I \times_f F$.

Si (F, g) es completa, $\inf(f(u)) > 0$ y u es entera, entonces Σ_u es completa.

Llamamos $\mathbf{B}_f = \{-f'(t)/f(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}$, entonces

Si u es una solución, entonces Σ_u es una CMC con curvatura media H en el GRW $M = I \times_f F$.

Si (F, g) es completa, $\inf(f(u)) > 0$ y u es entera, entonces Σ_u es completa.

Llamamos $\mathbf{B}_f = \{-f'(t)/f(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}$, entonces

Teorema (C-Ro-Ru)

Sea (F, g) una superficie Riemanniana completa y no compacta con $K^F \geq 0$.

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función cumpliendo $(\log f)'' \leq 0$ e $\inf(f) > 0$.

- 1 Si $H \notin \mathbf{B}_f \cup \{0\}$, no existen soluciones enteras de la ecuación (E), cumpliendo $H^2 \leq \frac{f'(u)^2}{f(u)^2}$.
- 2 Si $H \in \mathbf{B}_f \setminus \{0\}$, entonces $u \equiv t_0$, donde $H = -\frac{f'(t_0)}{f(t_0)}$, es la única solución entera de (E), cumpliendo $H^2 \leq \frac{f'(u)^2}{f(u)^2}$.

Teorema (C-Ro-Ru)

Sea (F, g) una superficie Riemanniana completa y no compacta con $K^F \geq 0$.

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función cumpliendo $(\log f)'' \leq 0$.

- 1 Si $H \notin \mathbf{B}_f \cup \{0\}$, no existen soluciones enteras **acotadas**.
- 2 Si $H \in \mathbf{B}_f \setminus \{0\}$, entonces $u \equiv t_0$, donde $H = -\frac{f'(t_0)}{f(t_0)}$, es la única solución entera **acotada**.

R. Aiyama, On the Gauss map of complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Minkowski space, *Tsukuba J. Math.* **16** (1992), 353–361.

M. Caballero, A. Romero y R. M. Rubio, Complete CMC spacelike surfaces with bounded hyperbolic angle in Generalized Robertson-Walker spacetimes, *Preprint* 2009.

J. M. Latorre and A. Romero, Uniqueness of noncompact spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Generalized Robertson-Walker spacetimes, *Geom. Dedicata* **93** (2002), 1–10.

B. Palmer, The Gauss map of a spacelike constant mean curvature hypersurface of Minkowski space, *Comment Math. Helv.* **65** (1990), 52–57.

A. Romero and R. M. Rubio, On maximal surfaces in certain non flat 3-dimensional Robertson-Walker spacetimes, *Preprint* 2009.

Y. L. Xin, On the Gauss image of a spacelike hypersurface with constant mean curvature in Minkowski space, *Comment. Math. Helv.* **66** (1991), 590–598.