Fundamentos de Geometría de Finsler y Geometría de Espaciotiempos Estacionarios: el Borde de Cauchy y Busemann

Workshop on Differential Geometry and Relativity
Cedeira, 2009

José Luis Flores

Universidad de Málaga

Esquema de la Charla

- **Parte I:**
  - Borde de Cauchy de una Variedad de Finsler
  - Borde de Busemann de una Variedad de Finsler
- **Parte II:**
  - Borde Causal de Espaciotiempos
  - Caso Estacionario Estándar
  - Otras aplicaciones

Borde de Cauchy de una Variedad de Finsler

Definiciones Básicas

- **Variedad de Finsler:** Par (M, F) formado por una variedad diferenciable M y una métrica de Finsler F.

Definiciones Básicas

- **Variedad de Finsler:** Par (M, F) formado por una variedad diferenciable M y una métrica de Finsler F.
- **Métrica de Finsler Revertida:** $\tilde{F}(x, v) := F(x, -v)(\neq F(x, v))$.

Definiciones Básicas

- **Variedad de Finsler:** Par (M, F) formado por una variedad diferenciable M y una métrica de Finsler F.
- **Métrica de Finsler Revertida:** $\tilde{F}(x, v) := F(x, -v)(\neq F(x, v))$.

$\star$ **Notación:** $F \equiv F_+ \equiv +$, $\quad \tilde{F} \equiv F_- \equiv -$.

Definiciones Básicas

- **Variedad de Finsler:** Par (M, F) formado por una variedad diferenciable M y una métrica de Finsler F.
- **Métrica de Finsler Revertida:** $\tilde{F}(x, v) := F(x, -v)(\neq F(x, v))$.

$\star$ **Notación:** $F \equiv F_+ \equiv +$, $\quad \tilde{F} \equiv F_- \equiv -$.

- **(Quasi-)distancia Finsler:** Aplicación $d_+ : M \times M \to \mathbb{R}$ dada por:

$$d_+(x, y) := inf_{c \in C(x,y)} long(c) = inf_{c \in C(x,y)} \int_{s_0}^{s_1} F_+(\dot{c}(s))ds,$$

$C(x, y) \equiv$curvas diferenciables a trozos que unen x con y.

Definiciones Básicas

- **Variedad de Finsler:** Par (M, F) formado por una variedad diferenciable M y una métrica de Finsler F.
- **Métrica de Finsler Revertida:** $\tilde{F}(x, v) := F(x, -v)(\neq F(x, v))$.

$\star$ **Notación:** $F \equiv F_+ \equiv +$, $\quad \tilde{F} \equiv F_- \equiv -$.

- **(Quasi-)distancia Finsler:** Aplicación $d_+ : M \times M \to \mathbb{R}$ dada por:

$$d_+(x, y) := inf_{c \in C(x,y)} long(c) = inf_{c \in C(x,y)} \int_{s_0}^{s_1} F_+(\dot{c}(s))ds,$$

$C(x, y) \equiv$curvas diferenciables a trozos que unen x con y.

- **Topología** de M como variedad coincide con la generada por:

$$B^+(x, r) = \{y \in M : d_+(x, y) < r\}, \quad \forall\, x \in M, \ \forall\, r \in \mathbb{R}^+.$$

Borde de Cauchy

- **Sucesión de Cauchy:** Sucesión $\sigma = \{x_n\}_n$ en (M, F_+) tal que para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $d_+(x_n, x_m) < \epsilon \; \forall m \geq n \geq n_0$.

Borde de Cauchy

- **Sucesión de Cauchy:** Sucesión $\sigma = \{x_n\}_n$ en (M, F_+) tal que para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $d_+(x_n, x_m) < \epsilon \, \forall m \geq n \geq n_0$.
- $\mathrm{Cau}_+(M) \equiv$ Sucesiones de Cauchy en (M, F_+).

Borde de Cauchy

- **Sucesión de Cauchy:** Sucesión $\sigma = \{x_n\}_n$ en (M, F_+) tal que para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $d_+(x_n, x_m) < \epsilon \; \forall m \geq n \geq n_0$.
- $\mathrm{Cau}_+(M) \equiv$ Sucesiones de Cauchy en (M, F_+).
- **Proposición:** Sean $\sigma = \{x_n\}, \sigma' = \{x'_n\} \in \mathrm{Cau}_+(M)$ dos sucesiones de Cauchy. La relación dada por $\sigma \sim \sigma'$ sii

$$\lim_n (\lim_m d_+(x_n, x'_m)) = \lim_n (\lim_m d_+(x'_n, x_m)) = 0 \quad (\star)$$

es una relación de equivalencia sobre $\mathrm{Cau}_+(M)$.

Borde de Cauchy

- **Sucesión de Cauchy:** Sucesión $\sigma = \{x_n\}_n$ en (M, F_+) tal que para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $d_+(x_n, x_m) < \epsilon \; \forall m \geq n \geq n_0$.
- $\mathrm{Cau}_+(M) \equiv$ Sucesiones de Cauchy en (M, F_+).
- **Proposición:** Sean $\sigma = \{x_n\}, \sigma' = \{x'_n\} \in \mathrm{Cau}_+(M)$ dos sucesiones de Cauchy. La relación dada por $\sigma \sim \sigma'$ sii

$$\lim_n (\lim_m d_+(x_n, x'_m)) = \lim_n (\lim_m d_+(x'_n, x_m)) = 0 \quad (\star)$$

es una relación de equivalencia sobre $\mathrm{Cau}_+(M)$.
- **Sucesión de Cauchy*:** Sucesión $\sigma = \{x_n\}_n$ en (M, F_+) tal que $lim_n(lim_m d_+(x_n, x_m)) = 0$.

Borde de Cauchy

- **Sucesión de Cauchy:** Sucesión $\sigma = \{x_n\}_n$ en (M, F_+) tal que para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $d_+(x_n, x_m) < \epsilon \; \forall m \geq n \geq n_0$.
- $\mathrm{Cau}_+(M) \equiv$ Sucesiones de Cauchy en (M, F_+).
- **Proposición:** Sean $\sigma = \{x_n\}, \sigma' = \{x'_n\} \in \mathrm{Cau}_+(M)$ dos sucesiones de Cauchy. La relación dada por $\sigma \sim \sigma'$ sii

$$\lim_n(\lim_m d_+(x_n, x'_m)) = \lim_n(\lim_m d_+(x'_n, x_m)) = 0 \quad (\star)$$

es una relación de equivalencia sobre $\mathrm{Cau}_+(M)$.

- **Sucesión de Cauchy*:** Sucesión $\sigma = \{x_n\}_n$ en (M, F_+) tal que $lim_n(lim_m d_+(x_n, x_m)) = 0$.

$\Leftrightarrow$ para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ existe $m_0(n)$ tal que si $m \geq m_0(n)$ entonces $d_F(x_n, x_m) < \epsilon$.

Borde de Cauchy

- **Sucesión de Cauchy:** Sucesión $\sigma = \{x_n\}_n$ en (M, F_+) tal que para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $d_+(x_n, x_m) < \epsilon \; \forall m \geq n \geq n_0$.
- $\mathrm{Cau}_+(M) \equiv$ Sucesiones de Cauchy en (M, F_+).
- **Proposición:** Sean $\sigma = \{x_n\}, \sigma' = \{x'_n\} \in \mathrm{Cau}_+(M)$ dos sucesiones de Cauchy. La relación dada por $\sigma \sim \sigma'$ sii

$$\lim_n (\lim_m d_+(x_n, x'_m)) = \lim_n (\lim_m d_+(x'_n, x_m)) = 0 \quad (\star)$$

  es una relación de equivalencia sobre $\mathrm{Cau}_+(M)$.
- **Sucesión de Cauchy*:** Sucesión $\sigma = \{x_n\}_n$ en (M, F_+) tal que $lim_n(lim_m d_+(x_n, x_m)) = 0$.
- **Observación:** Toda sucesión de Cauchy en este sentido contiene alguna subsucesión de Cauchy en el sentido previo.

Borde de Cauchy

- **Completación de Cauchy:** Se define como el espacio cociente

$$M_C^+ := \mathrm{Cau}_+(M)/\sim$$

- **Borde de Cauchy:** Se define como la diferencia

$$\partial_C^+ M := M_C^+ \setminus M$$

Borde de Cauchy

- **Completación de Cauchy:** Se define como el espacio cociente

$$M_C^+ := \mathrm{Cau}_+(M)/\sim$$

- **Borde de Cauchy:** Se define como la diferencia

$$\partial_C^+ M := M_C^+ \setminus M$$

Si repetimos el mismo proceso para $\tilde{F} \equiv F_-$, obtenemos:

- **Completación de Cauchy hacia atrás:** $M_C^- := \mathrm{Cau}_-(M)/\sim$
- **Borde de Cauchy hacia atrás:** $\partial_C^- M := M_C^- \setminus M$

Borde de Cauchy

- **Proposición:** Si $\sigma, \sigma' \in \mathrm{Cau}_+(M)$ son equivalentes para F_+ y $\sigma \in \mathrm{Cau}_-(M) \Rightarrow \sigma' \in \mathrm{Cau}_-(M)$ y σ, σ' son equivalentes para F_-.

Borde de Cauchy

- **Proposición:** Si $\sigma, \sigma' \in \mathrm{Cau}_+(M)$ son equivalentes para F_+ y $\sigma \in \mathrm{Cau}_-(M) \Rightarrow \sigma' \in \mathrm{Cau}_-(M)$ y σ, σ' son equivalentes para F_-.

Esto nos permite comparar $\partial_C^+ M$ con $\partial_C^- M$, y así podemos definir:

- **Borde de Cauchy Simetrizado:** Es la intersección de los bordes de Cauchy asociados a F_+ y F_-:

$$\partial_C^s M := \partial_C^+ M \cap \partial_C^- M$$

Borde de Cauchy

- **Proposición:** Si $\sigma, \sigma' \in \mathrm{Cau}_+(M)$ son equivalentes para F_+ y $\sigma \in \mathrm{Cau}_-(M) \Rightarrow \sigma' \in \mathrm{Cau}_-(M)$ y σ, σ' son equivalentes para F_-.

Esto nos permite comparar $\partial_C^+ M$ con $\partial_C^- M$, y así podemos definir:

- **Borde de Cauchy Simetrizado:** Es la intersección de los bordes de Cauchy asociados a F_+ y F_-:

$$\partial_C^s M := \partial_C^+ M \cap \partial_C^- M$$

- **Proposición:** Una sucesión σ pertenece a $\partial_C^s M$ sii es una sucesión de Cauchy para la *distancia simetrizada*:

$$d_s(x, y) := \frac{1}{2}(d_+(x, y) + d_-(x, y)).$$

Distancia y Topología Extendidas

- **Definición:** La aplicación $d_+ : M_C^+ \times M_C^+ \to [0,\infty]$ dada por

$$d_+(x,y) := \lim_n (\lim_m d_+(x_n, y_m)), \quad x \equiv [\{x_n\}], \;\; y \equiv [\{y_n\}],$$

extiende d_+ sobre M y define una (quasi-)distancia sobre M_C^+.

Distancia y Topología Extendidas

- **Definición:** La aplicación $d_+ : M_C^+ \times M_C^+ \to [0,\infty]$ dada por

$$d_+(x,y) := \lim_n (\lim_m d_+(x_n, y_m)), \quad x \equiv [\{x_n\}], \ \ y \equiv [\{y_n\}],$$

extiende d_+ sobre M y define una (quasi-)distancia sobre M_C^+.

- **Propiedades:**
  - La inclusión $i : M \hookrightarrow M_C^+$ es un embebimiento topológico.
  - $\partial_C^+ M$ es cerrado en M_C^+.
  - La topología asociada a la distancia extendida d_+ no es Hausdorff en general, sino sólo T_0.

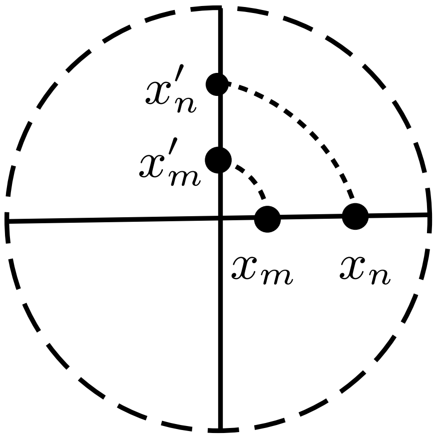
Distancia y Topología Extendidas

- **Definición:** La aplicación $d_+ : M_C^+ \times M_C^+ \to [0, \infty]$ dada por

$$d_+(x, y) := \lim_n (\lim_m d_+(x_n, y_m)), \quad x \equiv [\{x_n\}], \ \ y \equiv [\{y_n\}],$$

  extiende d_+ sobre M y define una (quasi-)distancia sobre M_C^+.
- **Propiedades:**
  - La inclusión $i : M \hookrightarrow M_C^+$ es un embebimiento topológico.
  - $\partial_C^+ M$ es cerrado en M_C^+.
  - La topología asociada a la distancia extendida d_+ no es Hausdorff en general, sino sólo T_0.
- La distancia d_- se extiende a M_C^-, con propiedades similares.

Ejemplo



$M = D^* \equiv$ disco unidad $-$ segm. horiz. $[-1, 0]$
$F = \sqrt{dr^2 + d\theta^2} - (1-r)d\theta$

$\{x_n = (1/n, 0)\}_n$
$\{x'_n = (1/n, \pi/2)\}_n$

Propiedades:

(1) $x = [\{x_n\}]$, $x' = [\{x'_n\}] \in \partial_C^s M$

(2) $d_+(x, x') = \lim_n(\lim_m d_F(x_n, x'_m)) = 0$,
$d_+(x', x) = \lim_n(\lim_m d_F(x'_n, x_m)) \geq \pi/2$.

(3) Topología no Hausdorff (sólo T_0).

Borde de Busemann de una Variedad de Finsler

Antecedentes Riemannianos

Construcciones Clásicas Previas:

- *Eberlein*, *O'Neill* '73: Compactificación para cualquier variedad de Hadamard basada en clases de equivalencia de rayos.
- *Gromov* '78: Compactificación universal para cualquier variedad riemanniana completa.

Propiedades:

- Ambas construcciones coinciden en variedades de Hadamard.
- Las funciones de Busemann desempeñan un papel esencial en esta equivalencia.

El Caso Finsler

- **Función 1-Lipschitz (Generalizada):** Una función $f : M \to \mathbb{R}$ es una función 1-Lipschitz sobre (M, F_+) si, para todo $x, y \in M$ tal que $f(y) \geq f(x)$ se tiene

$$f(y) - f(x) \leq d_+(x, y).$$

El Caso Finsler

- **Función 1-Lipschitz (Generalizada):** Una función $f : M \to \mathbb{R}$ es una función 1-Lipschitz sobre (M, F_+) si, para todo $x, y \in M$ tal que $f(y) \geq f(x)$ se tiene

$$f(y) - f(x) \leq d_+(x, y).$$

- $\mathcal{L}_1(M, F_+) \equiv$ Funciones 1-Lipschitz sobre (M, F_+) dotadas con la topología de convergencia puntual.

El Caso Finsler

- **Función 1-Lipschitz (Generalizada):** Una función $f : M \to \mathbb{R}$ es una función 1-Lipschitz sobre (M, F_+) si, para todo $x, y \in M$ tal que $f(y) \geq f(x)$ se tiene

$$f(y) - f(x) \leq d_+(x, y).$$

- $\mathcal{L}_1(M, F_+) \equiv$ Funciones 1-Lipschitz sobre (M, F_+) dotadas con la topología de convergencia puntual.
- Para cada x, la función $d_x^+(\cdot) := d_+(\cdot, x)$ es 1-Lipschitz.

El Caso Finsler

- **Función 1-Lipschitz (Generalizada):** Una función $f : M \to \mathbb{R}$ es una función 1-Lipschitz sobre (M, F_+) si, para todo $x, y \in M$ tal que $f(y) \geq f(x)$ se tiene

$$f(y) - f(x) \leq d_+(x, y).$$

- $\mathcal{L}_1(M, F_+) \equiv$ Funciones 1-Lipschitz sobre (M, F_+) dotadas con la topología de convergencia puntual.
- Para cada x, la función $d_x^+(\cdot) := d_+(\cdot, x)$ es 1-Lipschitz.
- La aplicación $j^+ : M \to \mathcal{L}_1(M, F_+)$ dada por $x \mapsto d_x^+$ define un embebimiento topológico.

El Caso Finsler

- **Función 1-Lipschitz (Generalizada):** Una función $f : M \to \mathbb{R}$ es una función 1-Lipschitz sobre (M, F_+) si, para todo $x, y \in M$ tal que $f(y) \geq f(x)$ se tiene
$$f(y) - f(x) \leq d_+(x, y).$$
- $\mathcal{L}_1(M, F_+) \equiv$ Funciones 1-Lipschitz sobre (M, F_+) dotadas con la topología de convergencia puntual.
- Para cada x, la función $d_x^+(\cdot) := d_+(\cdot, x)$ es 1-Lipschitz.
- La aplicación $j^+ : M \to \mathcal{L}_1(M, F_+)$ dada por $x \mapsto d_x^+$ define un embebimiento topológico.
- La aplicación j^+ se induce sobre $\mathcal{L}_1(M, F_+)_* = \mathcal{L}_1(M, F_+)/\mathbb{R}$.

El Caso Finsler

- **Función 1-Lipschitz (Generalizada):** Una función $f : M \to \mathbb{R}$ es una función 1-Lipschitz sobre (M, F_+) si, para todo $x, y \in M$ tal que $f(y) \geq f(x)$ se tiene

$$f(y) - f(x) \leq d_+(x, y).$$

- $\mathcal{L}_1(M, F_+) \equiv$ Funciones 1-Lipschitz sobre (M, F_+) dotadas con la topología de convergencia puntual.
- Para cada x, la función $d_x^+(\cdot) := d_+(\cdot, x)$ es 1-Lipschitz.
- La aplicación $j^+ : M \to \mathcal{L}_1(M, F_+)$ dada por $x \mapsto d_x^+$ define un embebimiento topológico.
- La aplicación j^+ se induce sobre $\mathcal{L}_1(M, F_+)_* = \mathcal{L}_1(M, F_+)/\mathbb{R}$.
- La aplicación inducida $j^+ : M \to \mathcal{L}_1(M, F_+)_*$ es embebimiento.

El Caso Finsler

- **Compactificación de Gromov:** Se define como la clausura

$$M_G^+ := \overline{j^+(M)} \subset \mathcal{L}_1(M, F_+)_*.$$

- **Borde de Gromov:** Se define como la diferencia

$$\partial_G^+ M := \overline{j^+(M)} \setminus j^+(M).$$

El Caso Finsler

- **Compactificación de Gromov:** Se define como la clausura

$$M_G^+ := \overline{j^+(M)} \subset \mathcal{L}_1(M, F_+)_*.$$

- **Borde de Gromov:** Se define como la diferencia

$$\partial_G^+ M := \overline{j^+(M)} \setminus j^+(M).$$

- **Proposición:** M_G^+ y $\partial_G^+ M$ son compactos.

El Caso Finsler

- **Compactificación de Gromov:** Se define como la clausura

$$M_G^+ := \overline{j^+(M)} \subset \mathcal{L}_1(M, F_+)_*.$$

- **Borde de Gromov:** Se define como la diferencia

$$\partial_G^+ M := \overline{j^+(M)} \setminus j^+(M).$$

- **Proposición:** M_G^+ y $\partial_G^+ M$ son compactos.

Si repetimos el mismo proceso para $\tilde{F} \equiv F_-$ obtenemos:

- **Compactificación de Gromov hacia atrás:** $M_G^- := \overline{j^-(M)}$.
- **Borde de Gromov hacia atrás:** $\partial_G^- M := \overline{j^-(M)} \setminus j^-(M)$.

El Caso Finsler

- $C^+(M) \equiv$ Espacio de las curvas inextensibles $c : [\alpha, \Omega) \to M$ con $F_+(\dot{c}) \leq 1$.

El Caso Finsler

- $C^+(M) \equiv$ Espacio de las curvas inextensibles $c : [\alpha, \Omega) \to M$ con $F_+(\dot{c}) \leq 1$.
- **Función de Busemann:** Para cualquier $c \in C^+(M)$, definimos b_c^+ como la función:

$$b_c^+(\cdot) = \lim_{s \nearrow \Omega} (s - d_+(\cdot, c(s))).$$

El Caso Finsler

- $C^+(M) \equiv$ Espacio de las curvas inextensibles $c : [\alpha, \Omega) \to M$ con $F_+(\dot{c}) \leq 1$.
- **Función de Busemann:** Para cualquier $c \in C^+(M)$, definimos b_c^+ como la función:

$$b_c^+(\cdot) = \lim_{s \nearrow \Omega} (s - d_+(\cdot, c(s))).$$

- **Proposición:** Sea b_c^+ la función de Busemann de $c \in C^+(M)$.
  (i) O bien $b_c^+ \equiv \infty$ ó $b_c^+ \in \mathcal{L}_1(M, F_+)$ y satisface $[b_c^+] \in \partial_G^+ M$.
  (ii) Si $\Omega < \infty \Rightarrow \lim_{t \nearrow \Omega} c(t) = \bar{x} \in \partial_C^+ M$ y $b_c^+(\cdot) = \Omega + d_{\bar{x}}^+(\cdot)$.
  En este caso, su clase satisface $[b_c^+] \in \partial_C^+ M (\subset \partial_G^+ M)$.
  (iii) Si $\Omega = \infty$ y $b_c^+ \not\equiv \infty \Rightarrow$ su clase satisface $[b_c^+] \in \partial M_G^+ \backslash \partial_C^+ M$.

El Caso Finsler

Definimos

$$B^+(M) = \{b_c^+ < \infty : c \in C^+(M)\}, \quad \mathcal{B}^+(M) = \{b_c^+ \in B^+(M) : \Omega = \infty\}$$

El Caso Finsler

Definimos

$$B^+(M) = \{b_c^+ < \infty : c \in C^+(M)\}, \quad \mathcal{B}^+(M) = \{b_c^+ \in B^+(M) : \Omega = \infty\}$$

Entonces

$$B^+(M) = (B^+(M) \backslash \mathcal{B}^+(M)) \cup \mathcal{B}^+(M) \;\Rightarrow\; B^+(M)/\mathbb{R} = \partial_C^+ M \cup \mathcal{B}^+(M)/\mathbb{R}.$$

El Caso Finsler

Definimos

$$B^+(M) = \{b_c^+ < \infty : c \in C^+(M)\}, \quad \mathcal{B}^+(M) = \{b_c^+ \in B^+(M) : \Omega = \infty\}$$

Entonces

$$B^+(M) = (B^+(M) \backslash \mathcal{B}^+(M)) \cup \mathcal{B}^+(M) \;\Rightarrow\; B^+(M)/\mathbb{R} = \partial_C^+ M \cup \mathcal{B}^+(M)/\mathbb{R}.$$

Por tanto, si definimos

$$\partial_B^+ M := B^+(M)/\mathbb{R}, \qquad \partial_{\mathcal{B}}^+ M := \mathcal{B}^+(M)/\mathbb{R}$$

obtenemos:

$$\partial_B^+ M = \partial_C^+ M \cup \partial_{\mathcal{B}}^+ M \qquad (M_B^+ := M \cup \partial_B^+ M).$$

El Caso Finsler

En resumen:

$$(M, F_+)$$

$$\downarrow$$

$$M_C^+ = M \cup \partial_C^+ M$$

$$\downarrow$$

$$M_B^+ = M \cup \partial_B^+ M = M \cup \partial_C^+ M \cup \partial_{\mathcal{B}}^+ M$$

$$\downarrow$$

$$M_G^+ = M \cup \partial_G^+ M = M \cup \partial_C^+ M \cup \partial_{\mathcal{B}}^+ M \cup \{\text{resto de } \partial_G^+ M\}.$$

El Caso Finsler

En resumen:

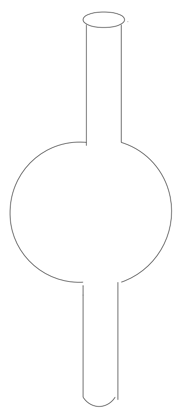
$$(M, F_+)$$
$$\downarrow$$
$$M_C^+ = M \cup \partial_C^+ M$$
$$\downarrow$$
$$M_B^+ = M \cup \partial_B^+ M = M \cup \partial_C^+ M \cup \partial_{\mathcal{B}}^+ M$$
$$\downarrow$$
$$M_G^+ = M \cup \partial_G^+ M = M \cup \partial_C^+ M \cup \partial_{\mathcal{B}}^+ M \cup \{\text{resto de } \partial_G^+ M\}.$$

- Razonando con F_-, obtenemos construcciones análogas:

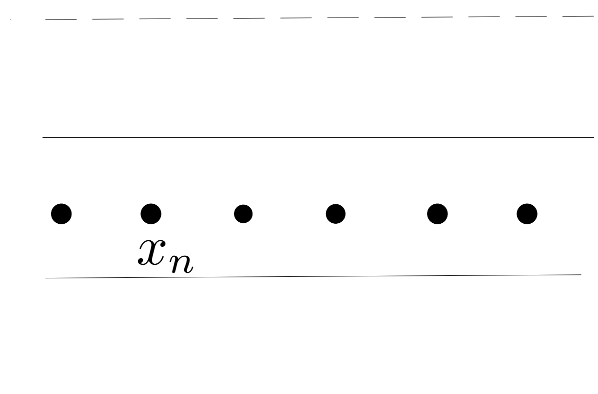
$$M_B^- = M \cup \partial_C^- M \cup \partial_{\mathcal{B}}^- M = M \cup \partial_B^- M, \quad M_G^- = M \cup \partial_G^- M$$

Ejemplo Riemanniano

M_1



$M \equiv$ recubridor universal de M_1



Curvatura $\equiv 0$

Curvatura > 0

Curvatura $\equiv 0$

$\{[d_{x_n}]\}_n$ converge en M_G pero no converge en M_B.

Borde Causal de Espaciotiempos

Borde Causal

- **Construcción invariante conforme muy general.**

Borde Causal

- **Construcción invariante conforme muy general.**
- **Idea Básica:**
  - A cada curva temporal futura (pasada) inextensible se le asocia un *punto ideal futuro (pasado)*.
  - Curvas temporales futuras (pasadas) inextensibles se asocian al mismo punto ideal si tienen el mismo pasado (futuro).
  - El *borde causal futuro (pasado)* es el conjunto de puntos ideales futuros (pasados).
  - El *borde causal (total)* se define como la unión de los bordes causales futuro y pasado bajo ciertas “identificaciones”.

Borde Causal

- **Construcción invariante conforme muy general.**
- **Idea Básica:**
  - A cada curva temporal futura (pasada) inextensible se le asocia un *punto ideal futuro (pasado)*.
  - Curvas temporales futuras (pasadas) inextensibles se asocian al mismo punto ideal si tienen el mismo pasado (futuro).
  - El *borde causal futuro (pasado)* es el conjunto de puntos ideales futuros (pasados).
  - El *borde causal (total)* se define como la unión de los bordes causales futuro y pasado bajo ciertas “identificaciones”.
- **Se le dota de estructuras causal y topológica naturales que extienden las del espaciotiempo original.**

Borde Causal de Espaciotiempos Estacionarios

Borde Causal de los Estacionarios

- **Definición:** Diremos que (V, g) es *estacionario estándar* si

$$V = \mathbb{R} \times M, \quad g = -dt^2 + \omega \otimes dt + dt \otimes \omega + g_0.$$

Borde Causal de los Estacionarios

- **Definición:** Diremos que (V, g) es *estacionario estándar* si

$$V = \mathbb{R} \times M, \quad g = -dt^2 + \omega \otimes dt + dt \otimes \omega + g_0.$$

- Una curva $\gamma(s) = (t(s), c(s))$ es temporal futura sii

$$F_+(\dot{c}(s)) < \dot{t}(s)$$

donde $F_+(v) := \omega(v) + \sqrt{\omega^2(v) + g_0(v, v)}$, $v \in TM$.

Borde Causal de los Estacionarios

- **Definición:** Diremos que (V,g) es *estacionario estándar* si

$$V = \mathbb{R} \times M, \quad g = -dt^2 + \omega \otimes dt + dt \otimes \omega + g_0.$$

- Una curva $\gamma(s) = (t(s), c(s))$ es temporal futura sii

$$F_+(\dot{c}(s)) < \dot{t}(s)$$

donde $F_+(v) := \omega(v) + \sqrt{\omega^2(v) + g_0(v,v)}$, $v \in TM$.

- Por tanto: $(t_0, x_0) \ll (t_1, x_1) \iff d_+(x_0, x_1) < t_1 - t_0$.

Borde Causal de los Estacionarios

- **Definición:** Diremos que (V,g) es *estacionario estándar* si

$$V = \mathbb{R} \times M, \quad g = -dt^2 + \omega \otimes dt + dt \otimes \omega + g_0.$$

- Una curva $\gamma(s) = (t(s), c(s))$ es temporal futura sii

$$F_+(\dot{c}(s)) < \dot{t}(s)$$

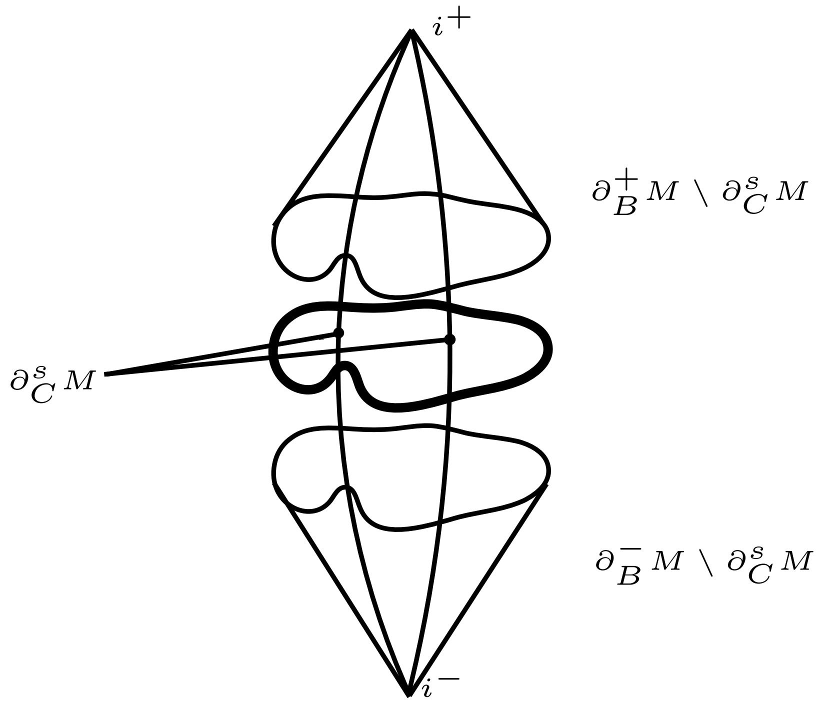
donde $F_+(v) := \omega(v) + \sqrt{\omega^2(v) + g_0(v,v)}$, $v \in TM$.

- Por tanto: $(t_0, x_0) \ll (t_1, x_1) \iff d_+(x_0, x_1) < t_1 - t_0$.
- Si $\gamma(s) = (t(s), c(s))$ es temporal futura (pasada) entonces

$$I^-[\gamma] = \{(t', x') : t' < b_c^+(x')\} \quad (I^+[\gamma] = \{(t', x') : t' > -b_c^-(x')\}).$$

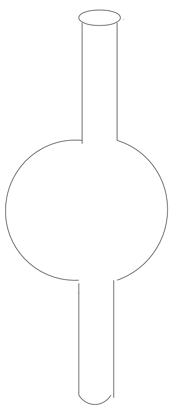
Borde Causal de los Estacionarios

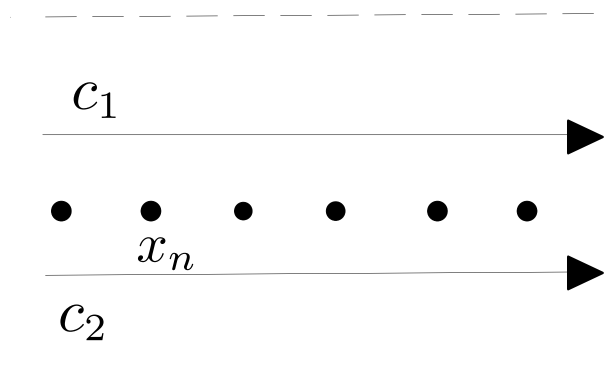
Teorema (JLF,Herrera,Sánchez)**:** El borde causal de $(\mathbb{R} \times M, g)$ está formado por dos conos luminosos de bases $\partial_B^+ M \setminus \partial_C^s M$, $\partial_B^- M \setminus \partial_C^s M$ y vértices i^+, i^-, más líneas temporales sobre cada punto de $\partial_C^s M$ uniendo i^+, i^-.



Otras Aplicaciones

M_1 $\quad$ $M \equiv$ recubridor universal de M_1





Curvatura > 0

Curvatura $\equiv 0$

Curvatura > 0

$\{[d_{x_n}]\}_n$ converge a $\{[b_{c_1}]\}$, $\{[b_{c_2}]\}$ en M_B.

Otras Aplicaciones

- Sean R_g, $R_{g'}$ métricas de Randers asociadas a g, g', resp., tales que $R_g - R_{g'} = df$ para cierta $f : M \to \mathbb{R}$.

Otras Aplicaciones

- Sean R_g, $R_{g'}$ métricas de Randers asociadas a g, g', resp., tales que $R_g - R_{g'} = df$ para cierta $f : M \to \mathbb{R}$.
- Entonces g, g' son isométricas vía $(t, x) \mapsto (t + f(x), x)$.

Otras Aplicaciones

- Sean R_g, $R_{g'}$ métricas de Randers asociadas a g, g', resp., tales que $R_g - R_{g'} = df$ para cierta $f : M \to \mathbb{R}$.
- Entonces g, g' son isométricas vía $(t, x) \mapsto (t + f(x), x)$.
- Luego los bordes causales ∂V asociados a g y g' coinciden.

Otras Aplicaciones

- Sean R_g, $R_{g'}$ métricas de Randers asociadas a g, g', resp., tales que $R_g - R_{g'} = df$ para cierta $f : M \to \mathbb{R}$.
- Entonces g, g' son isométricas vía $(t, x) \mapsto (t + f(x), x)$.
- Luego los bordes causales ∂V asociados a g y g' coinciden.
- Por el teorema anterior:
  (i) Los borde de Busemann $\partial_B M^{\pm}$ asociados a R_g y $R_{g'}$ coinciden.
  (ii) Los bordes de Cauchy simetrizados $\partial_C^s M$ asociados a R_g y $R_{g'}$ coinciden.

Otras Aplicaciones

- Sean R_g, $R_{g'}$ métricas de Randers asociadas a g, g', resp., tales que $R_g - R_{g'} = df$ para cierta $f : M \to \mathbb{R}$.
- Entonces g, g' son isométricas vía $(t, x) \mapsto (t + f(x), x)$.
- Luego los bordes causales ∂V asociados a g y g' coinciden.
- Por el teorema anterior:
  (i) Los borde de Busemann $\partial_B M^{\pm}$ asociados a R_g y $R_{g'}$ coinciden.
  (ii) Los bordes de Cauchy simetrizados $\partial_C^s M$ asociados a R_g y $R_{g'}$ coinciden.

$\star$ Los bordes de Cauchy $\partial_C M^{\pm}$ asociados a R_g y $R_{g'}$ pueden no coincidir.