1) Evalúa las integrales dobles siguientes, donde R es la región acotada por las ecuaciones que se dan en cada caso (habrá que elegir el orden de integración más conveniente):

(a) $\iint_R x^3y^2\,dA;\quad y=x,\ y=0,\ x=1$ (b) $\iint_R (2x+4y+1)\,dA;\quad y=x^2,\ y=x^3$

(c) $\iint_R 2xy\,dA;\quad y=x^3,\ y=8,\ x=0$ (d) $\iint_R \frac{xy^2}{x^2+1}\,dA;\quad x=0,\ x=1,\ y=-3,\ y=3.$

2) Invierte el orden de integración en las integrales iteradas siguientes:

(a) $\int_0^2\int_0^{y^2} f(x,y)\,dx\,dy$ (b) $\int_0^3\int_1^{e^x} f(x,y)\,dy\,dx.$

3) Usa coordenadas polares para evaluar las integrales siguientes:

(a) $\iint_R e^{x^2+y^2}\,dA$, con R la corona circular de radio entre 1 y 2.

(b) $\int_0^2\int_x^{\sqrt{8-x^2}} \frac{1}{5+x^2+y^2}\,dy\,dx$.

4) Dibuja la región tridimensional de integración correspondiente a la siguiente integral triple:

$$\int_0^6\int_0^{4-2x/3}\int_0^{3-x/2-3y/4} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

5) Expresa la integral del ejercicio anterior como integral iterada en el orden $dy\,dx\,dz$.

6) Calcula $\int_0^1\int_0^1\int_0^{2-x^2-y^2} xye^z\,dz\,dx\,dy.$

7) Calcula $\iiint_R ze^{x^2+y^2}\,dV$ donde R es el cilindro de base circular de radio 2 centrada en el origen y altura $0\le z\le 5$.

8) Calcula $\iiint_R e^{x^2+y^2+z^2}\,dV$ con R la parte en el primer octante de la esfera de radio 1 centrada en el origen. ¿Y si se cambia R por toda la esfera de radio 1?

9) ¿Qué integral triple habría que plantear para calcular el volumen de una esfera de radio ρ en coordenadas cartesianas? ¿Y en coordenadas esféricas? Calcula el volumen de dicha esfera.

10) Halla el valor de las siguientes integrales, determinando y dibujando en cada caso el recinto de integración:

(a) $\iiint_Q (2x+3y+z)\,dx\,dy\,dz$, con $Q=[1,2]\times[-1,1]\times[0,1]$.

(b) $\iiint_T x^2\cos z\,dx\,dy\,dz$, siendo T la región limitada por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=\pi$, $x+y=1$.

(c) $\iiint_\Omega x\,y^2\,z^3\,dx\,dy\,dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $z=x\,y$ y los planos $y=x$, $x=1$ y $z=0$.

(d) $\iiint_\Omega x\,y\,\sqrt{z}\,dx\,dy\,dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $y=x^2$ y los planos $y=z$, $y=1$ y $z=0$.

11) Calcula los siguientes volúmenes:

(a) Volumen de la intersección del cilindro $x^2+y^2\le 4$ y la bola $x^2+y^2+z^2\le 16$.

(b) Volumen del sólido limitado por los conos $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ y $z=-1+\sqrt{x^2+y^2}$.

(c) Volumen de la región limitada por el paraboloide $z=x^2+y^2$ y el cilindro $x^2+y^2=4$ en $z\ge 0$.

12) En cada uno de los siguientes casos, la integral $\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ de la función positiva f se reduce a la integral iterada dada. Dibuja la región de integración $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ y su proyección sobre el plano $z=0$. Escribe entonces la integral como una o varias integrales iteradas en las que la integración se hace en el orden $dz\,dx\,dy$.

(a) $\int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^y f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx.$

(b) $\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx.$

(c) $\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx.$

13) Utiliza coordenadas esféricas para calcular las siguientes integrales triples. Dibuja el recinto de integración en cada caso.

(a) $\iiint_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2+9)^2}\,dx\,dy\,dz$, siendo B la bola de radio 3 centrada en el origen de coordenadas.

(b) $\iiint_C x\,y\,z\,dx\,dy\,dz$, con $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x,y,z \geq 0\right\}$.

(c) $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, siendo D la corona entre las esferas de radios a y $2\,a$.

14) Determina y dibuja el recinto de integración y halla el valor de las siguientes integrales, cambiando a coordenadas cilíndricas:

(a) $\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $x^2+y^2 = 2\,z$ y el plano $z = 2$.

(b) $\iint_\Omega dx\,dy\,dz$, siendo Ω la región limitada por los planos coordenados, $z = x^2+y^2$ y $x+y = 1$.

(c) $\iiint_\Omega (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$ siendo Ω un cono recto de revolución, de altura h, base de radio $a > 0$ situado en el plano $z = 0$ y eje en el eje z.