1) Calcula el determinante de cada una de las matrices cuadradas que aparecen en la Hoja 3. ¿Cuáles son inversibles?

2) Usando la fórmula para la inversa de una matriz, calcula la matriz inversa de cada una de las matrices cuadradas que aparecen en la Hoja 3 y que sean inversibles.

3) Usando el teorema de Rouché-Frobenius, discute y clasifica cada uno de los sistemas lineales que aparecen en la Hoja 3.

4) Halla m y p para que la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ m & p & 3 & 1 \end{pmatrix}$ tenga rango 3.

5) Determina λ para que las tres rectas

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+2y & = & 1 \\ 2x+y & = & 0 \\ 3x+\lambda y & = & 1 \end{array} \right.$$

pasen por un mismo punto del plano.

6) Determina a y b para que los tres planos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+2y-z & = & 1 \\ 2x+y+az & = & 0 \\ 3x+3y-2z & = & b \end{array} \right.$$

definan una recta (es decir, que los puntos solución del sistema sean precisamente los puntos de una recta).

7) En cada uno de los siguientes casos, determina si el conjunto de vectores dado: (i) es linealmente independiente, (ii) si genera el espacio euclídeo correspondiente, y (iii) si es base del mismo:
(a) $\{(-1,1,0),(0,2,0),(3,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ (b) $\{(-1,0),(2,2),(57,\pi)\} \subset \mathbb{R}^2$
(c) $\{(1,0,0,0),(0,2,0,0),(0,0,3,0)\} \subset \mathbb{R}^4$ (d) $\{(1,1,1),(0,0,0),(-1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$

8) Supongamos que $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ es una base de un espacio euclídeo. ¿Cuáles son las coordenadas de $\overrightarrow{u_2}$ y de $\overrightarrow{u_1} - 3\overrightarrow{u_3}$ respecto de β? ¿Y respecto de $\beta' = \{\overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$? ¿Y respecto de $\beta' = \{\overrightarrow{u_3}, -\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$?

9) Se considera en $\mathbb{R}^3$ la base $\beta = \{(0,-1,1),(0,1,1),(1,0,1)\}$. Los vectores que tienen coordenadas $(1,1,1)$, $(0,1,1)$ y $(\sqrt{2},x,a)$ en la base β, ¿qué coordenadas tienen en la base canónica?

10) Calcula las coordenadas de los vectores $(1,2,3)$, $(1,0,0)$ y $(1,-1,2)$ respecto de la base β del ejercicio anterior, primero por cálculo directo, y después hallando la matriz de cambio de base apropiada.

11) Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (1,-1,1) \in \mathbb{R}^3$ y $\overrightarrow{v} = (-2,0,0) \in \mathbb{R}^3$ y las bases

$$\beta = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}, \qquad \beta' = \{(-1,0,1),(2,0,1),(0,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$, calcula las coordenadas de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tanto con respecto a la base β como con respecto a β'. Hazlo primero por cálculo directo y, después, hallando las matrices de cambio de base adecuadas. ¿Cuál es la matriz de cambio de base de β a β'? ¿Y de β' a β?

12) Halla el ángulo que forman los vectores $(1,2)$ y $(-1,0)$ de $\mathbb{R}^2$ con respecto a la recta con ecuación $x+y=0$. Calcula los ángulos que forman entre sí los vectores $\overrightarrow{u_1} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{u_2} = (-1,1,0)$ y $\overrightarrow{u_3} = (2,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Halla los vectores proyección ortogonal de $\overrightarrow{u_1}$ y de $\overrightarrow{u_3}$ sobre la dirección de $\overrightarrow{u_2}$.

13) Calcula los vectores unitarios de $\mathbb{R}^3$ que forman un ángulo de 60º con el vector $(1,1,0)$. De entre ellos, determina si hay alguno ortogonal al vector $(1,0,0)$. ¿Y al vector $(2,3,0)$?

14) Determina si las bases $\beta = \{(1,0,0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\}$, $\beta' = \{(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0), (-1, \frac{4}{3}, 0), (0,0,1)\}$ y $\beta'' = \{((0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ son ortonormales.

15) Calcula la ecuación del plano que pasa por el origen y que es tangente a los vectores:
(a) $(1,0,1)$ y $(1,-1,0)$ (b) $(0,0-2)$ y $(1,1,1)$ (c) $(-1,2,1)$ y $(3,0,1)$.
Para cada caso, calcula el plano paralelo al ya calculado pero que pasa por el punto $(1,0,2)$.

16) Dados los puntos $P = (1,1,3)$, $Q = (0,0,2)$ y $R = (1,0,1)$, determinar si están alineados (es decir, si están en una misma recta en el espacio). En caso negativo, halla el área del triángulo del que son vértices. Haz lo mismo para el caso $P = (-1,2,0)$, $Q = (-2,0,2)$ y $R = (0,1,1)$.

17) Halla tres vectores ortogonales al vector $(5,-3,2)$. ¿Cuántos hay en total? ¿Dónde se encuentran?

18) Determinar la condición que deben verificar las coordenadas (x,y,z) de un punto P del espacio para que P equidiste de los puntos $A = (2,0,-1)$ y $B = (0,2,-1)$.

19) Representa graficamente y di qué tipo de cónicas y cuádricas son las dadas por las ecuaciones:
(a) $x^2 + y^2 = 3$ en $\mathbb{R}^2$ (b) $(x-2)^2 + y^2 = 4$ en $\mathbb{R}^2$ (c) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ en $\mathbb{R}^2$
(d) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 0$ en $\mathbb{R}^2$ (d) $4x^2 + (y-2)^2 = 4$ en $\mathbb{R}^2$ (e) $xy = 4$ en $\mathbb{R}^2$
(f) $2y^2 - x = 2$ en $\mathbb{R}^2$ (g) $y^2 - (x-2)^2 = 1$ en $\mathbb{R}^2$ (h) $x^2 - y^2 = 0$ en $\mathbb{R}^2$
(i) $x^2 + y^2 + (z-1)^3 = 1$ en $\mathbb{R}^3$ (j) $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 4$ en $\mathbb{R}^3$ (k) $(x-1)^2 + z^2 = 1$ en $\mathbb{R}^3$
(l) $-x^2 + y^2 + z^2 = -1$ en $\mathbb{R}^3$ (m) $(x-1)^2 + y^2 = z^2$ en $\mathbb{R}^3$ (n) $x^2 = 2y$ en $\mathbb{R}^3$
(o) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en $\mathbb{R}^3$ (p) $z = x^2 + 4y^2$ en $\mathbb{R}^3$ (q) $x^2 - y^2 = z$ en $\mathbb{R}^3$.

20) Razona cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales y, para las que lo sean, calcula la correspondiente matriz:
(a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x + y - z$ (b) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x,2)$
(c) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (2y, y^2, x)$ (d) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (0,0,|y|)$
(e) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $f(x,y) = (2y, 3x, x+y, 0)$ (f) $f\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z,t,r,s) = (0,0)$

21) Calcula los autovalores y los correspondientes autovectores de cada una de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$,

(f) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, (g) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (h) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, (i) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, (j) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

22) Para cada una de las matrices diagonalizables A del ejercicio anterior, calcula una base de autovectores y obtén una matriz invertible P y una matriz diagonal D para las que se cumpla la relación $AP = PD$. Utiliza esta relación para calcular cuánto vale la potencia A^n, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

23) Calcula los posibles valores de a para que las matrices $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & a \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & a \\ 2-a & 2 \end{pmatrix}$ tengan a 1 por autovalor. En dichos casos, calcula los correspondientes autovectores.

24) Sea A una matriz real cuadrada y diagonalizable de tamaño $n \times n$. Se sabe que sólo tiene un autovalor, que es igual λ. Demostrar que $A = \lambda I$. Da un ejemplo de una matriz no diagonalizable que tenga por único autovalor a λ.