1) Usando el método de Gauss, clasifica los siguientes sistemas lineales y halla todas sus soluciones:

(a) $\begin{cases} 2x-y-z+t &= 2 \\ 3x+y+2z &= 3 \\ 2y+2t &= -4 \\ x+4y+3z+t &= -3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3 &= 7 \\ 3x_1+2x_2-x_3 &= 1 \\ 2x_1-5x_2+2x_3 &= 6 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ y-z &= 5 \\ x+z+2t &= 1 \\ x+2y &= 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-2x_4 &= 1 \\ x_1+3x_2 &= -1 \\ 3x_1-x_3-x_4 &= 0 \\ 6x_1+x_2-3x_4 &= 2 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 5x+2y-3z+t &= -2 \\ 2x+z-t &= 1 \\ 3x+2y-4z+2t &= -3 \\ 6x+4y-8z+4t &= -6 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} z_1+2z_2+3z_3 &= 2 \\ z_1-z_2+z_3 &= 0 \\ z_1+3z_2-z_3 &= -2 \\ 3z_1+4z_2+3z_3 &= 0 \end{cases}$

2) Resuelve simultáneamente los siguientes sistemas lineales que sólo difieren en los terminos independientes:

(a) $\left\{ \begin{array}{rcr|r} 2y_1-4y_2 &=& 10 & -8 \\ y_1-3y_2+y_4 &=& -4 & -2 \\ y_1-y_3+2y_4 &=& 4 & 9 \\ 3y_1-4y_2+3y_3-y_4 &=& -11 & -15 \end{array} \right.$ (b) $\left\{ \begin{array}{rcr|r} 2x_1-4x_2 &=& 10 & -8 \\ x_1-3x_2+x_4 &=& -4 & -2 \\ x_1-x_3+2x_4 &=& 4 & 9 \end{array} \right.$

3) Escribe un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que tenga como una de sus soluciones a $x=-1$, $y=2$, $z=1$, y que además admita otras soluciones.

4) Escribe un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas que tenga solución única.

5) Escribe un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas que no tenga solución.

6) Interpreta y representa geométricamente los siguientes sistemas de ecuaciones en el plano. Es decir, para cada sistema determina si las rectas definidas por cada una de las ecuaciones se intersecan, son coincidentes o son paralelas; si el sistema tiene más de dos ecuaciones, analiza qué pasa con cada par de rectas, y si hay algún punto que pertenezca a todas.

(a) $\begin{cases} -x+3y &= -1 \\ 5x+2y &= 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x+4y &= 2 \\ x+2y &= 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x+4y &= 2 \\ x+2y &= -3 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 6x+4y &= 2 \\ 3x+2y &= -3 \\ x-y &= 0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} -x+4y &= 1 \\ 3x+2y &= -3 \\ x-y &= 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} -x+2y &= 2 \\ x+2y &= 4 \\ 3x-y &= -4 \end{cases}$

7) Interpreta geométricamente los siguientes sistemas de ecuaciones en el espacio tridimensional. Es decir, estudia las posiciones relativas de los planos definidos por cada una de las ecuaciones, indicando si son secantes, paralelos o coincidentes, e indicando si hay algún punto común a todos los planos. Haz un dibujo que represente lo que sucede en cada caso.

(a) $\begin{cases} -x+3y+z &= -1 \\ 5x+2y-z &= 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x+4y-6z &= 2 \\ x+2y-3z &= 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x+4y-6z &= 2 \\ x+2y-3z &= 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} -x+3y+z &= -1 \\ -x+3y+z &= 1 \\ x+2y-5z &= 0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x+4y &= 2 \\ x+2y-3z &= 0 \\ z &= 1 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} 2x+3y &= 2 \\ x-y &= 0 \\ x+y &= 0 \end{cases}$

(g) $\left\{\begin{array}{rcl} -x+y+z &=& 1 \\ -2x+2y+3z &=& 3 \\ x-y &=& 0 \end{array}\right.$ (h) $\left\{\begin{array}{rcl} x+4y &=& 2 \\ -x-4y &=& 0 \\ -y-z &=& 0 \\ y+z &=& 1 \end{array}\right.$ (i) $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2 \\ y &=& 0 \\ x+y &=& 1 \\ z &=& 0 \end{array}\right.$

8) En cada uno de los siguientes casos decide si tienen sentido las siguientes expresiones: $A+B+C$, ABC y $A+BC$. Realiza los cálculos en los casos en los que puedan hacerse.
(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

9) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcular AX, A^2X, A^3X, X^tA, X^tX, XX^t y $2XX^t + 3A$. Comprueba que $X^tA^t = (AX)^t$ y $A(XX^t + A) = AXX^t + A^2$.

10) Calcula $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, $A^4 = AAAA$, y en general $A^n = A \overset{n)}{\ldots} A$ para los siguientes valores de A:
(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11) Demuestra que, si A es una matriz cuadrada, entonces $A + A^t$ es simétrica y $A - A^t$ es antisimétrica. Usando que $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$ observa que toda matriz cuadrada es suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

12) Calcula, si existe, la inversa de las siguientes matrices usando el método de Gauss:
(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \sqrt{2} & -4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 1 & -4\sqrt{-3} \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
(e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ -5 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} a+2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ para cada $a \in \mathbb{R}$

13) Escribe el sistema lineal correspondiente al problema de ajuste de cada una de las siguientes reacciones químicas, y resuélvelo:
(a) $CO_2 + H_2O \to C_6H_{12}O_6 + O_2$
(b) $C_2H_2Cl_4 + Ca(OH)_2 \to C_2HCl_3 + CaCl_2 + H_2O$