

## PROFESOR

Miguel Domínguez Vázquez.  
Despacho 17-304 (Ciencias).  
Email: miguel.dominguezv@uam.es.

## PÁGINA WEB DE LA ASIGNATURA

<http://verso.mat.uam.es/~miguel.dominguezv/teaching/cag.html>

## PROGRAMA

### Parte 1. Estructura de grupos y álgebras de Lie.

- 1.1. Resumen de conceptos previos: grupos de Lie, subgrupos de Lie, álgebras de Lie, ejemplos clásicos, aplicación exponencial, homomorfismos, recubrimientos de grupos de Lie.
- 1.2. Representaciones de grupos y álgebras de Lie.
- 1.3. Álgebras de Lie resolubles, nilpotentes y semisimples.
- 1.4. Teoremas de Lie y Engel.
- 1.5. Forma de Killing y criterios de Cartan.
- 1.6. Grupos y álgebras de Lie compactos.
- 1.7. Álgebras de Lie complejas semisimples: representaciones de  $SL(2, \mathbb{C})$ , subálgebras de Cartan, raíces, diagramas de Dynkin, grupo de Weyl, clasificación y aplicación al estudio de álgebras de Lie compactas.
- 1.8. Enunciado y comentarios sobre la descomposición de Levi, el tercer teorema de Lie, el teorema de Ado y la fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff.

### Parte 2. Complementos de geometría riemanniana.

- 2.1. Resumen de conceptos previos de geometría de Riemann: variedades semi-riemannianas, riemannianas y lorentzianas, grupo de isometrías, conexión de Levi-Civita, campos de Killing, aplicación exponencial, tensor de curvatura, holonomía, espacios modelo.
- 2.2. Completitud y el teorema de Hopf-Rinow.
- 2.3. Campos de Jacobi, puntos conjugados, fórmulas de la primera y la segunda variación de la energía, cut locus y radio de inyectividad.
- 2.4. Teoremas de Hadamard y de Bonnet-Myers.
- 2.5. Inmersiones isométricas, subvariedades inmersas, embebidas y cerradas.
- 2.6. Segunda forma fundamental, operador de configuración, curvaturas principales, curvatura media, conexión normal.
- 2.7. Ecuaciones fundamentales de la geometría de subvariedades. Enunciado y comentarios sobre el teorema fundamental de la geometría de subvariedades.
- 2.8. Tipos importantes de subvariedades: totalmente geodésicas, totalmente umbílicas, minimales, con curvatura media constante.
- 2.9. Acciones isométricas de grupos de Lie, acciones propias, existencia de slices, tipos de órbitas.
- 2.10. Hipersuperficies homogéneas, con curvaturas principales constantes e isoparamétricas.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. M. Alexandrino, R. Bettiol: *Lie groups and geometric aspects of isometric actions*. Springer, Cham, 2015.
- [2] M. Berger: *A panoramic view of Riemannian geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [3] J. Berndt: *Lie group actions on manifolds*. Versión pdf, 2002. Disponible online: <https://nms.kcl.ac.uk/juergen.berndt/sophia.pdf>
- [4] J. Berndt, S. Console, C. Olmos: *Submanifolds and holonomy*. Second edition, Monographs and Research Notes in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.
- [5] M. P. Do Carmo: *Riemannian geometry*. Translated from the second Portuguese edition. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.
- [6] A. W. Knap: *Lie groups beyond an introduction*. Second edition, Birkhäuser, 2002.
- [7] B. Hall: *Lie groups, Lie algebras, and representations. An elementary introduction*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 222, Springer, Cham, 2015.
- [8] S. Helgason: *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. Corrected reprint of the 1978 original, American Mathematical Society, 2001.
- [9] J. M. Lee: *Riemannian manifolds. An introduction to curvature*. Graduate Texts in Mathematics, 176. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [10] Y. Matsushima: *Differentiable manifolds*. Pure and Applied Mathematics, 9, Marcel Dekker, Inc., New York, 1972.
- [11] B. O'Neill: *Semi-Riemannian geometry, with applications to relativity*. Pure and Applied Mathematics, 103, Academic Press, Inc., New York, 1983.
- [12] A. L. Onishchik, E. B. Vinberg (Eds.): *Lie Groups and Lie Algebras III. Structure of Lie Groups and Lie Algebras*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 41, Springer, Berlin, 1994.
- [13] P. Petersen: *Riemannian geometry*. Third edition. Graduate Texts in Mathematics, 171, Springer, Cham, 2016.
- [14] H. Samelson: *Notes on Lie algebras*. Second edition. Universitext, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [15] V. S. Varadarajan: *Lie groups, Lie algebras, and their representations*. Reprint of the 1974 edition. Graduate Texts in Mathematics, 102, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [16] F. W. Warner: *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Springer, 1983.
- [17] W. Ziller: *Lie groups, representation theory and symmetric spaces*. Versión pdf, 2010. Disponible online: <https://www.math.upenn.edu/~wziller/math650/LieGroupsReps.pdf>

## MÉTODO DE EVALUACIÓN

La calificación final se calculará en base a

1. Entrega de ejercicios: 50 %.
2. Trabajo escrito + exposición: 40 %.
3. Participación y actitud en clase: 10 %.